ElCoM
ELECTRICAL COMPUTER MECHATRONICS

ابصار حاسوب

د.خليل يوسف

للطالبة المبدعة
ميار ابو عبده

إرادة - ثقة - تغيير

SPAN
BASIS
RANK

Dimension of V:-

$\dim(R^n) = n$

$\dim(P_n) = n+1$

$\dim(M_{m \cdot n}) = m*n$

Ex:-

$\dim(R^2) = 2$ $\dim(R^3) = 3$

Q) let $S = \{v_1, v_2, \ldots v_r\}$. Does $\mathrm{span}(S) = \boxed{V?}$

اول اشي بجيب قيمة ال r اللي هي عدد الvector في S

وبعديك بجيب ال dim لل V.

1) IF $r < \dim(V) \rightarrow \mathrm{span}(S) \neq V$

2) If $r = \dim(V)$
- $\rightarrow \det(A) \neq 0 \rightarrow \mathrm{span}(S) = V$
- $\rightarrow \det(A) = 0 \rightarrow \mathrm{span}(S) \neq V$

3) If $r > \dim(V) \rightarrow$ we must solve

Singular $\rightarrow \det(A) = 0$

non-Singular $\rightarrow \det(A) \neq 0$

#basis vectors = n (column)

full Rank

null space
RANK
singular, non singular
Basis vector
Egine Value

Basis vector:-

علشان اجيب ال Basis vector لازم امسك ال matrix و اطبقة ال rref عليها واشوف وين في bovet value العامود اللي بكون في bovet value بكون هوال Basis

Ex:-

bovet

$$A = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 \\ 0 & \textcircled{1} \end{bmatrix}$$

بنطبقه ال rref مطبقة وجاهز

بعدها بدنا نشوف وين ال bovet

عندي 2 bovet ← يعني عندي 2 Basis اللي هما

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

RANK:- عدد الصفوف الغير صفرية بعد ال rref

RANK(A) + عدد ال Basis للnull space = # of columns of A

أرجو منكم الدعاء لوالدي سمير أبو عمر بالرحمة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{m\times n}{\vec{A}} . \underset{n\times 1}{\vec{X}} = \underset{m\times 1}{\vec{O}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 + X_2 + x_3 + X_4 = 0$

$x_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 = 0$

$4X_1 + 3X_2 + 2X_3 + X_4 = 0$

$$\begin{array}{l} \\ R_2 = R_2 - R_1 \\ R_3 = 3R_1 - R_3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$R_1 = R_1 - R_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & \downarrow & & & \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

~~$X_1 - X_3 - 2X_4 = 0 \rightarrow X_1 = X_3 + 2X_4 \; / \; X_3 = -X_1 + 2X_4$~~

~~$X_2 + 2X_3 + 3X_4 = 0 \quad X_2 = -2X_3 - 3X_4 \rightarrow 2X_4 =$~~

~~$= X_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + X_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$~~ ✓

~~$X_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + X_4 \begin{bmatrix} 1 \\ \\ \\ \end{bmatrix}$~~

basis = 2

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Rank = 2

---

* ملاحظة كتيركتير مهمة كيف بعرف
ال free varibles هما الي ما بتكون قيمهم
bovet value و هون بطلع عنا X_4 / X_3

$X_1 - X_3 - 2X_4 = 0$

$X_2 + 2X_3 + 3X_4 = 0$

$X_1 = X_3 + 2X_4$

$X_2 = -2X_3 - 3X_4$

$$X_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + X_4 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eigenspace → non-singular بس ال

$\det(A - \lambda I) = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & -4 \\ -1 & -1-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$(2-\lambda)(-1-\lambda) - 4 = 0$

$\cancel{(-2+\lambda^{2}}$

$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$

$\lambda = 3 , \quad \lambda = -2$

$$\lambda = -2 = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \hline 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{array}$$

x_2 → free varibales

$x_1 - x_2 = 0 \qquad x_2 = x_1 \rightarrow x_1 = x_2$

$$x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_2 → free varibale

$x_1 + 4x_2 = 0$

$x_1 = -4x_2$

$$x_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Homogeneos coordinate:

1- point

كيف بنمثلها ← $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

دايما لازم يكون واحد

Physical coordinate → 2D (R^2) (x, y)

Homogeneos coordinate → 3D (R^3) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

benfit of Homogeneos coordinate:

1- multiplication with 3x3 matrix for Transformation

* Rotation, Scaling.

2. Intersection of two Line

3- Line

$ax + by + c = 0$ → Line equation.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

y- ~~point~~ point / slope / x- point

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_0 = mx - mx_0$$

$$\underset{a}{mx} \underset{b}{- y} \underbrace{- mx_0 + y_0}_{c} = 0$$

In 2D Line = $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

3D Line = $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

اذا بعطيني Line و نقطة كيف بدي اعرف اذا هاي النقطة على ال Line :-

$$\underbrace{\vec{L}^T X}_{dot} = 0$$

$\vec{L}^T$ → Line تمثل / X → النقطة

equivalence class :-

ان يكون عندي اكتر من Homogeneos coordinate لنفس النقطة مثال :-

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ \underset{K=2}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ \underset{K=3}{3} \end{bmatrix}$$

كيف بعبر عن ال (Origin Point) بال Homogeneos :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Intersection

* لو اعطاني two Lines وبدي اجيب Point.

بينهم :- بعمل بينهم cross product.

$L_1 \times L_2$ = Intersection point

كيف نعمل $L_1 \times L_2$ ←

$$\vec{L_1} \times \vec{L_2} = \begin{bmatrix} +\hat{i} & -\hat{j} & +\hat{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

$L_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ $\vec{L_2} = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$ وبعدها بجيب ال det.

$$det = \hat{i}(bf - ec) - \hat{j}(af - cd) + \hat{k}(ae - db)$$

$$\begin{bmatrix} bf - ec \\ cd - af \\ ae - db \end{bmatrix} \rightarrow \text{Point Intersection}$$

---

* لو اعطاني two Points و عملت بينهم cross product بينهم بجيب ال Line اللي بمر بال two Points.

كيف اجيب معادلة ال X-axis :-

باخذ two points على ال X-axis و بعمل cross Product

و هيك بطلعه

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

الفرق بين ال Line و ال Line segment :-

Line → $(-\infty, \infty)$ بحاجة Point و Slop

Line segment → محصورة بين نقطتين

بحاجة ل two Points

* شو يعني $A \times B$:- انه بعمل cross Product

بين A و B بجيب العامودي على ال A و B

* ال dot Product ← $a \cdot b$ ← هاد بستخدمه

عشان اجيب الزاوية بين ال a و b :-

$|a||b|\cos(\theta)$

* كيف بنميز انه ~~two lin~~ two Line is parallel :-

بكون الهم نفس ال Slope وبختلف فقط

~~بس~~ بقيمة ال C.

$$\left.\begin{matrix}a_1, b_1\\ a_2, b_2\end{matrix}\right] - \; a_1 = a_2, \; b_1 = b_2$$

$$c_1 \neq c_2$$

~~$a \neq b$~~

when they have ~~two~~ the same slope :-

لما يكون a_1 و b_1 = a_2 و b_2 فهنه ال Slope

بيمثله ال a و ال b

$\vec{L_1}$ و $\vec{L_2}$ → Parallel Line

عشان اجيب ال Intersection Point بينهم بدي اجيب ال cross Product

$$\vec{L_1} = \begin{bmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{bmatrix} \qquad \vec{L_2} = \begin{bmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{bmatrix}$$

$a_1 \neq a_2, \; b_1 = b_2, \; c_1 \neq c_2$

$$\vec{L_1} \times \vec{L_2} = \begin{bmatrix}+\hat{i} & -\hat{j} & +\hat{k}\\ a & b & c_1\\ a & b & c_2\end{bmatrix}$$

$$\det = \hat{i}\,(bc_2 - bc_1) - \hat{j}\,(ac_2 - ac_1) + \hat{k}\,(ab - ab)$$

Intersection Point = $\begin{bmatrix}bc_2 - bc_1\\ ac_1 - ac_2\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b(c_2 - c_1)\\ a(c_1 - c_2)\\ 0\end{bmatrix}$

لو اقسم على $c_2 - c_1$

ال Intersection point بين two parallel lines بسموها (Ideal Point)

* Ideal Point :- هي ال Point اللي اخر مركبة فيها بتساوي صفر بتكون at Infiti..

بطلع

هاي ال Ideal Point ← $\begin{bmatrix}b\\-a\\0\end{bmatrix}$

---

* لو كان عندي two ideal Point بقدر اجيب ال line اللي بمر فيهم ← line at Infit ← بعمل cross Product بين ال two Point

$$\vec{P_1} = \begin{bmatrix}a\\b\\0\end{bmatrix} \qquad \vec{P_2} = \begin{bmatrix}c\\d\\0\end{bmatrix}$$

$$\vec{P_1} \times \vec{P_2} = \begin{bmatrix}a\\0\\1\end{bmatrix} \rightarrow \text{Line at Infit}$$

Vanishing Line :- ال Line موجود at Infit بمر في ال Ideal point

---

$$C = \begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix}$$

conic

Equation of conic In HC

$$\underset{1\times3}{\vec{X}^T}\ \underset{33}{C}\ \underset{3\times1}{\vec{X}} = 0$$

* The number of unknown parameters in any given Equation usually reffered to as number of Degree of Freedom

$$C_{3\times3} = \underbrace{\vec{L}\,\vec{m}^T}_{\text{outer of Product}} + \underbrace{\vec{m}\,\vec{L}^T}_{\text{outer of Product}}$$

* عشان اجيب ال Tangent line ع ال Conic

نحتاج معادلة ال conic مع ~~ ~~ نقطة ع ال conic

~~FE~~

نقطة بيلوم مرة

$$\text{Tangent} = \underset{5\times3}{C}\ \underset{3\times1}{\vec{X}}$$

The number of unknown parameters in any given Equation is usually reffered to number of Degree of Freedom

عدد ال Degree of Freedom بال Point :-

بال Point ← 2 / بال Line ← 2

نقسم ← $x = \frac{x}{x_3}$

$y = \frac{y}{x_3}$

عدد ال DoF بال conic :-

بال Conic ← 5 لانه ال F بيتقرر

نقسم المعادلة كلها ع f

(Because in HC only Ratios matte

حنحدد ال matrix . ال conic هي

Symmetric و ال rank الها = 2

ملاحظة :- اذا كان عندي full rank

يكون ال size ال null space = صفر

* دائماً دائماً دائماً ؟ ال Symmetric matrix 3x3

و ال rank الها بساوي 3 بتكون تعبر عن Conic دائماً او اقل من 3

* شو يعني ال Rank=3 ؟ :- يعني ممكن

الشكل :- circle / elipse / Parable

hyperbola ..

* اما اذا كان ال Rank اقل من 3 وقتها

رح يكون عندي special conics و اسم هاد النوع

هو ال conic ← degenerate conic

$$\underset{3\times3}{C} = \underset{3\times1}{\vec{L}}\ \underset{1\times3}{\vec{m}^T} + \underset{3\times1}{\vec{m}}\ \underset{1\times3}{\vec{L}^T}$$

outer product

$\underset{3\times1}{\vec{L}}\ \underset{1\times3}{\vec{m}^T}$ ← ال Rank الها بساوي (1) دائماً

و $\underset{3\times1}{\vec{m}}\ \underset{1\times3}{\vec{L}^T}$ ← ال Rank الها بساوي (1) دائماً

و $\underset{3\times3}{C}$ ← ال Rank = 2

ال conic اللي ال Rank = 3 بتكون اسمها
non-degenerate conic

outer ~~op~~ Product ؟ - يعني لو عندي u و v وبدي احل

و $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$ ← بنوجد outer Product

$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$

لو بدي اجي اضربهم لازم عدد ال rows
يساوي عدد ال columns بالاول
بالثاني

عشان هيك ← $u \otimes v$ ← $u.v^T$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

كيف عملية الضرب بتتم عادي بضرب u_1 بكل ال v و السطر اللي بعد بضرب ال u_2 بكل ال v وهكذا

$$\begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \\ u_4 v_1 & u_4 v_2 & u_4 v_3 \end{bmatrix}$$

استخدامات ال C H :-

1- اجيب ال Line اللي بمر ب two Points
2- نقطة التقاطع بين two Lines
3- عبرنا عن ال Line ∞ ب $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
4- نقطة التقاطع بين two Parallel Line و /
5- Finding a tangent Line equation of Conic

كيف بقدر اجيب ال tangent Line بكون معطيني معادلة ال Conic و نقطة على ال conic بضربهم وبطلع ال tangent Line

$\vec{L} = C_{3\times3} \vec{X}_{3\times1}$

بضربهم ضرب عادي

6- finding the equation of degenerate conic From $C_{3\times3} = \vec{L}\vec{m}^T + \vec{m}\vec{L}^T$

7) Defined equation of Line

8) بدي اعرف اذا هاي النقطة موجودة على ال conic او لا؟ كيف من خلال هاي المعادلة :-

$\vec{X}^T \vec{C} \vec{X} = 0$

بعوض النقطة ب X اذا حققت المعادلة بتكون النقطة واقعة على ال conic

هلأ كيف بدي اعرف اذا هاي النقطة موجودة على ال Tangent Line؟ بلازم تحقق هاي المعادلة

$\vec{L}\vec{X}^T = 0$

↙ tangent Line
النقطة

كيف نثبت انه ال tangent Line و $C\vec{X}$

اول الشي النقطة لازم تحقق ال tangent Line ع التالي

$\vec{L}\vec{X}^T = 0$ ← $\boxed{\vec{L}^T\vec{X}}$ او

$((C\vec{X})^T\vec{X}$

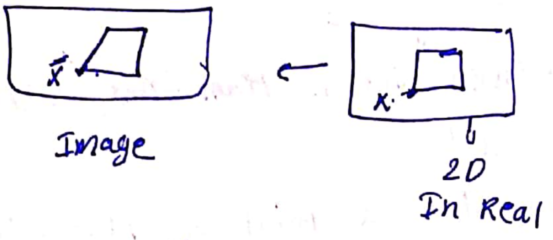
$\vec{X}^T C \vec{X} = 0$

هلأ كيف بوزع T .. بعكس ترتيب. C و X و بطيعهم ال T ..

هلأ C ليش مو حاطين عليها T لانها Symm
لانه ال Symmetric بكون $C = C^T$

لو كان عندي صورة بال 2D و صورته رح

يصير عندي disturtion. ← Transformation



هلأ لو نشوف In Real النقطة $\vec{x}$ بال Image تغيرت

صارت $\bar{x}$ كيف نجيب $\vec{x}'$

$$\underset{3\times1}{x'} = \underset{(3\times3)}{\vec{H}}\ \underset{3\times1}{\vec{x}}$$

ال Homography النقطة الاصلية

$\dot{x}$ → Point In the Camera Image

$\vec{x}'$ → point In 2D Scence.

x' and x → $\in \mathbb{R}^3$ (Point corSpodant)

H → 2D - projective Transformation or Homography

$H\vec{x}'$ → matrix vector multiplication is Linear operation

$\vec{x}$ → Point in 2D

$\vec{x}, \vec{x}'$ → ممكن يكونوا التنتين صور من two camera

-This could be seen when you are using your mobile camera to constract panoramic imag - يعني ادمج صورتين مع بعض.

$$\underset{3\times3}{H} = \underbrace{\begin{bmatrix} H_{11} & & \\ & & \\ & & H_{33} \end{bmatrix}}_{3\times3} \rightarrow \text{non-singular.}$$

Rank=3 full Rank

Scalling Rotation Translation

How many degrees of freedom?

(9) but since in HC only ratio matter we only have 8 DoF in H

بيعرف ال Rank → # of lines Independant vector in it

H_{33} →. we assume always is 1, if not divid all matrix over H_{33}

* كيف بقدر رجيب $\vec{x}$ اذا معي ال H و $\vec{x}'$ ؟

$$x' = Hx$$

عشان رجيب x شو بعمل ؟

* هلأ بما انه matrix فما في عملية قسمة

طيب شو اعمل عشان افلي x لحالها .

* بحكيلي انه $H^{-1}H$ ← لما اضرب H مع H^{-1}

بيعطيني Identy

* نضرب الطرفين ب H^{-1} وننتبه للمكان مهم

$$H^{-1}x' = \underbrace{H^{-1}\cdot H}_{1 \leftarrow \text{Identity}}\vec{x}$$

$$H^{-1}\vec{x}' = \vec{x}$$

* what guarantee that the Inverse of H indeed exsits?

لانه non-Singular دائماً بقدر احسب H^{-1}

* طيب شو اللي بضمن انه H ← non-singular

لانه ال matrix ناتجة من ضرب RST

$$\begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

طيب ليش موقع ال H^{-1} بالضرب مهم :-

لانه لو ضربت هيك $\underset{3\times1}{x'}\,\underset{3\times3}{H^{-1}} = H\cdot H^{-1}\cdot x$

→ ما بزبط لانه ال x ← 3x1

وال H ← 3x3

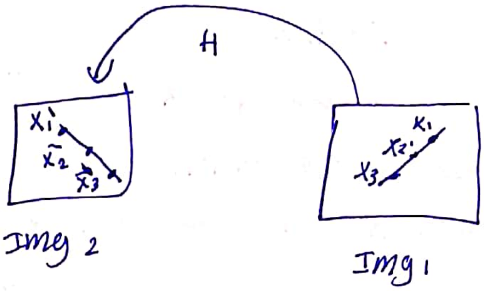
وكمان اذا ضرب هيك.

$H \cdot H^{-1}x$ هاد يعني

$(HX)H^{-1}$ وهاد مو متل $H^{-1}Hx$

* اذا كان في عنا Line بصورة الاولى وحولت الصورة لصورة تانية ال Line رح يضل Line ما بتغير شكله بس ممكن يتغير مكانه او يتغير اتجاهه او يكبر او يصغر بس بضله straight Line.

Exp:-



$\vec{x}_1' = H\vec{x}_1$, $\vec{x}_2' = H \cdot \vec{x}_2$, $\vec{x}_3' = H \cdot \vec{x}_3$

$\vec{x}_i' = H\ \vec{x}_i$ $\quad i = (1, 2, 3)$

where $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ are all reside In Line

بدي اثبت:- straight line $\vec{L}$ stay straight Line in the transformd plane.

then all transformd points $\vec{x}_1', \vec{x}_2', \vec{x}_3'$ must be located on $\vec{L}'$

$\vec{L}'^{T}\vec{x}_i' = 0$ → لازم اثبتها

Proof:-

$$\vec{L}^{T}\vec{x}_i = 0$$

But $\vec{x}_i' = H\ \vec{x}_i$

then $\vec{x}_i = H^{-1}\ \vec{x}_i'$

$$\vec{L}^{T}(H^{-1}\vec{x}_i') = 0$$

لو اقارن المعادلة اللي طلعت معنا مع $\vec{L}'^{T}\vec{x}_i' = 0$ رح الاقي انه

$$\vec{L}^{T}H^{-1} = \vec{L}'^{T}$$

بقدر ابدل $\vec{L}^{T}H^{-1}$ ← بهاي العلاقة $(H^{-T}\vec{L})^{T}$

$$(H^{-T}\vec{L})^{T}\ \vec{x}_1' = 0$$

$$\underbrace{\vec{L}' = H^{-T}\vec{L}}_{\downarrow}$$

a given line $\vec{L}$ transforms according to H^{-T}

* wheres a point $\vec{x}$ transforms according to H.

---

* ال Conic بدنا نشوف كيف رح يتعامله mapping

* ال- Conic يتكون من عدد من النقاط ويسمى Point conic معادلة ال Conic ← $\vec{x}^{T}C\vec{x} = 0$

و ال $\vec{x}$ بعرف انه $\vec{x} = H^{-1}\vec{x}'$

و ال Conic الجديد العلاقة

$$\vec{x}'^{T}\ C'\vec{x}' = 0$$

لو اجي اعوض مكان $\vec{x}$ هاد $H^{-1}\vec{x}'$

$$(H^{-1}\vec{x}')^{T}\ C\ (H^{-1}\vec{x}') = 0$$

$$(\vec{x}')^{T}\ \underbrace{H^{-T}\ C\ H^{-1}}\ \vec{x}' = 0$$

$(\vec{x}')^{T}\ C'\ \vec{x}' = 0$ لو اقارنها مع

$C' = H^{-T}\ C\ H^{-1}$ وهاد يعني انه

How a conic transfor :-

$$H^{-T}C\ H^{-1}$$

هلا احنا عرفنا كيف بنقدر نحول من Point ل Point

ومن Line ل Line ومن Conic ل Conic

* طيب كيف بدنا نحسب ال H نفسها ؟

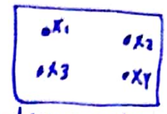
* اسهل طريقة انه نلاقي عن معادلات ال Point .

* ملاحظة مهمة جدا x و x' هما Corresponding Point

* د النقطة د النقطة ال Corresponding Point بيعطوني two equations

* اذا بدي احسب ال H من خلال معادلات ال Point فانا بحاجة الى 4 Point .


بعد ال H


الصوره الاصلي

اهم اشي انه الاربع 4 Points وجدول ال First Points يكونوا Corossponded

x اهم شرط بجدول النقاط انهم يكونوا 4- (non Collinear Point)

شو يعني non-collinear Point :-

انه ما يكون في 3 Points بمر بنفس ال Line .

بحكيلنا انه ممكن امثل ال H با vector .

جدول جديد colsand co 2 point

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} x & y & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'x & -yx' & -x' \\ 0 & 0 & 0 & x & y & 1 & -y'x & -yy & -y' \\ & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & \vdots \end{bmatrix}}_{8\times9} \underset{9\times1}{\begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{bmatrix}} = \underset{8\times1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

لا يكون عند 8 equation

$$\underbrace{A_{8\times9} * \boxed{\underset{9\times1}{\vec{h}}} = \underset{8\times1}{\vec{0}}}$$

هاد بمثل ال null space

لانه ال null لما تضرب ال matrix بتعطيني صفر

$\vec{h}$ → هو ال null Space

$\vec{h}$ → Is the null Space Solution of A

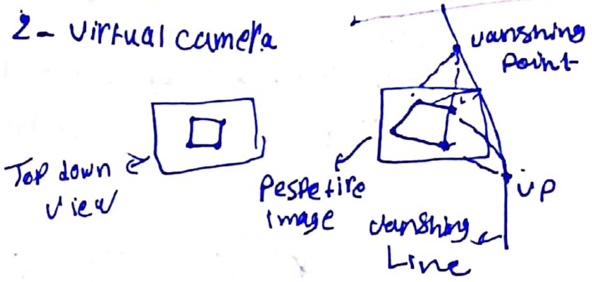
* خطوات الحل انه اجيب ال matrix A وبعدها اجيب ال nullspace لل A

Matrix (A)
↓
find N(A) → null space (A)
↓
reorganize the null space vector as a 3x3 matrix
↓
this Matrix will be (h)
↓
divide by h_{33} so that the find value of $h_{33} = 1$
↓
Normalization of the Homography

شو اهمية ال Homography :-

1- Panorama

2- Virtual camera



Virtual camera :-

يعني اخلي ال camera تجيب الصورة من الحترمن زوية بدون ما احركها

---

* SVD لما اعملها بتعطيني 3 matrix #

$M = U \Sigma V^T$

هاي هي ال null space

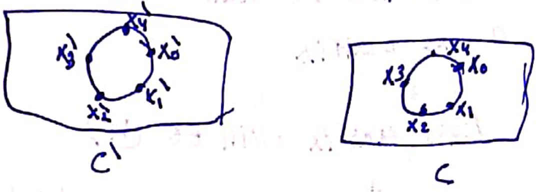
اخر columns فيها بمثل

كيف احسب H^{-1} :- بنستخدم S.V.D

* at Least we need 5 points to discribe the conic.

* non - collinear points - "no" 3 points Fall on the same Line

* يعني بال conic ~~▬~~ مستحيل يكون في two point بوقعوا ع نفس ال Line

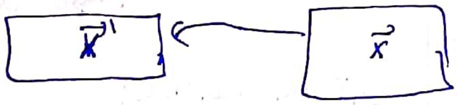


$$c' = H^{-T} \, c \, H^{-1}$$

هلأ هون احنا لازم تجيب ال H لانه انا عندي c و c'
بس مانايل اجيب ال H كيف اجيبه :- دول طريقة SVD

Do you Have other methods and how many point do we really need to estimate H? yes

هلأ باول مرة احتجنا 5 نقاط عشان احسب c'
هل بقدر باقل من 5 نقاط انه احسب c' .



لو بدي اطلع x' كيف

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & h_{1,3} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$x_1' = x_1(h_{11}) + x_1(h_{12}) + x_1(h_{13})$$
$$x_2' = x_2(h_{21}) + x_2(h_{22}) + x_2(h_{23})$$
$$x_3' = x_3(h_{31}) + x_3(h_{32}) + x_3(h_{33})$$

only 2 equation is Linearly Independent

هون رح حولهن Hc ← Physical كيف :-
من خلال انه يقسم ع x_3'.

$$x' = \frac{h_{1,1}x_1 + h_{1,2}x_1 + h_{1,3}x_1}{h_{3,1}x_3 + h_{3,2}x_3 + h_{3,3}x_3}$$

$$y' = \frac{h_{2,1}x_2 + h_{2,2}x_2 + h_{3,3}x_2}{h_{3,1}x_3 + h_{3,2}x_3 + h_{3,3}x_3}$$

$$h_{1,1}x + h_{12}y + h_{13} - h_{31}x'x - h_{32}x'y - h_{33}x' = 0$$

$$h_{21}x + h_{22}y + h_{23} - h_{31}y'x - h_{32}y'y - h_{33}y' = 0$$

* كل Point crosspodaned بتعطيني 2 equaction

* ال H في 8 Dof و لانه كل Point crosspondaned بتعطيني 2 equation و انا عندي H فيه 8 equations فكم من Point انا محتاجة عشان اجيبه

بحاجة الى 4 points لانه كل 2) Point تعطيني 2 equation .

How we can compute or estimate the parmeters of H ?

H ⇒ 3x3 non singular matrix,
↳ it has 8 Dof since only ratios matter

Recall. How the following geometric entities transform based on H ?

Points → $x' = Hx$

Line → $l' = H^{-T} L$

conic → $c' = H^{-T} c \, H^{-1}$

Ex:-

Finding Tangent Line where

conic → $x^2+y^2+25=0$

Point at conic (3,4) intersection

x-axis ?

Tangent Line = $C\vec{X}$

$L = C\vec{X}$
dot product

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -25 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Tangent Line}$$

Intersection point of tangent line with x-axis :-

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -25 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{i} & -\hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

معادلة ال xaxis

$$\hat{i}(4+2) - \hat{j}\cdot(3\times0+2\times0) + \hat{k}(3-0)$$

$$6\hat{i} + 0\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Homography:- دا يعبر في Transformation
على الصورة او distortion

what are the possible transformation :-

1- Projective Transformation

2- Affine Transformation

3- Simlarity Transformation

4- Encludain Transformation

(2,3,4) → Sub categories from Projective

كل انواع الـ Trans:- بتعدي على Points Line & conic 9

Transformation we mean some operations related to :-

1- Rotation
2- Translation
3- Scalling

→ we captured these by 3×3 matrix

A = SRT

$$A = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 6 \\ -\sin\theta & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A → nonsingular matrix

Rank = 3 → full Rank

A → 2-D Projective ~~matrix~~ Transforamation

حيث اقوى نوع بالTransformation :-

Projective → اقوى

Projective → Affine → simlality → Encludain

اقل نوع

لازم نثبت انه هاد ال Line بمس ال conic بنقطة واحدة فقط.

2 = Rank ← Singular matrix ← degenrate conic *

Full ~~Rank~~ Rank ← non-singular ← non-degenrate

* موهم موهم ← Rank(A) = Rank(A^T) = Rank(AA^T) = Rank(A^TA)

* Inner Product ← دائماً الناتج بكون Scalar 1×1 matrix

* EXP :-

$\vec{u}_{n\times1}$, $\vec{v}_{n\times1}$

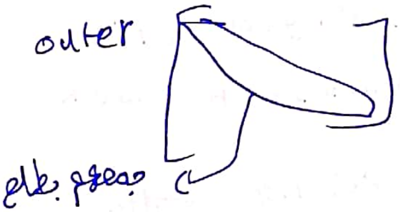
Outer Product → $\vec{u} \otimes \vec{v}^T = \text{Matrix}$

inner Product → $\underset{\text{dot product}}{\vec{u}^T \bullet \vec{v}} = \text{scalar}$

هذا ال inner Product ممكن اجيبه من ال outer Product

كيف من ال Matrix الناتجة من ال outer Product

باخد ال diagonal و بجمعهم المجموع اسمه Trace



مجموع بطلع Trace

Intersection Point →

$$\vec{L_1} \times \vec{L_2} = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}3\\-1\\-12\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\hat{i} & -\hat{j} & \hat{k}\\1 & -1 & 0\\3 & -1 & -12\end{bmatrix} = \hat{i}(12-0) - \hat{j}(-12) + \hat{k}(-1+3)$$

$$= 12\hat{i} + 12\hat{j} + 2\hat{k}$$

EXP :-

$\vec{L_1} = (1,2) , (0,1)$

$\vec{L_2} = (5,3) , (4,0)$

Find the Intersection Point between two Line :-

* بجيب معادلة ال Line (L_2, L_1)

$$L_1 = P_1 \times P_2$$

$$= \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\hat{i} & -\hat{j} & \hat{k}\\1 & 2 & 1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\det = \hat{i}(2\times1-1) - \hat{j}(1-0) + \hat{k}(1-0)$$

$$\hat{i} - \hat{j} + \hat{k} \rightarrow \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix}5\\3\\1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}4\\0\\1\end{bmatrix}$$

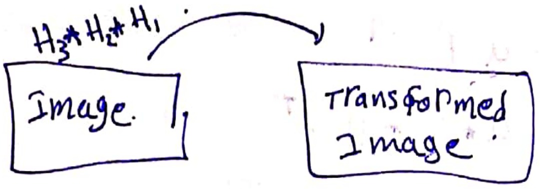
$$\begin{bmatrix}\hat{i} & -\hat{j} & \hat{k}\\5 & 3 & 1\\4 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \hat{i}(3-0) - \hat{j}(5-4) + \hat{k}(0-12)$$

$$= 3\hat{i} - \hat{j} - 12\hat{k}$$

$$\begin{bmatrix}3\\-1\\-12\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-13\\-15\\-2\end{bmatrix}$$



عملية الضرب تطبقت من H1 و بعدها H2 و بعدها H3.

لو كانت H1 و H2 و H3 كلهم Eucluden بتكون weekest distrution

يعني لو كان عندي مربع بالصورة الاصلية
اذا كان الناتج Eucluden رح يضل مربع

* اذا كان ناتج الضرب Projective الاشي الوحيد الي
ال Stright Line بضل Stright بس الشكل ممكن يتغير

يعني لو كان عندي بال Image الاصلية مربع

ال Stright بضل stright بس صولهم scalling و Rotation و Translation

---

Affine → الشروط انه last row لازم يكون

$v = 1$ و $v_{12} = (0, 0)$ ← (0 0 1)

و ال A لازم تكون non singular عشان ال matrix الاصلية تضل non-singular

الاشياء الي بضل زي ماهي بال Affine :-

1- in having parallel Lines to stay Prallel

what stay invariant :-

2- stright Line stay stright

هلا لانه ال Affine ← Sub group من ال Projective
بالتالي رح تاخد صفاتها عشان هيك ال Stright Line
بضل Stright

Affine → Dof = 6

How many equations or Point coressponding ~~we~~ need to essime H Affine?

3- Point coresponding
6- equations

لو نرجع على هاي ال matrix =

$$\begin{bmatrix} A_{2\times2} & t_{2\times1} \\ U_{1\times2} & v \end{bmatrix}$$

$A_{2\times2}$ → مسؤول عن ال Scalling و ال Rotation

$t_{2\times1}$ → مسؤول عن ال Translation

What stay Invariant under Affine:-

1- Stright Line stay stright
2- Prallel Line stay Prallel
3- area → بتضل نفسها

---

how we can prove the parallel Line stay parallel :-

$$L_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c` \end{pmatrix}$$

$$\vec{L_1} \times \vec{L_2} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix}$$

ideal Point

و بالصورة الجديدة ال

$$x` = H(x)$$

ideal Point

$$\begin{bmatrix} A_{2x2}\,a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1` \\ x_2` \\ 0 \end{bmatrix}$$

بتضل ideal Point

$$A = U D V^T$$

V → بتعمل Intial rotation
D → بتعمل scalling على 2-axis
U → final Rotation

orthognal Matrix :-

(2x2) لازم ال matrix تكون non-Singular

بتعمل Rotatation, Scalling

لازم لازم $\det(\text{matrix}) \neq 1$
$\neq 0.$

orthonormal matrix :-

2x2 لازم ال matrix تكون non-Singular

بتعمل Pure Rotation.

$\det(\text{matrix}) = 1$

orthonormal matrix $\leftarrow \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$

orthognal matrix $\cancel{S} \begin{bmatrix} \cancel{S}\cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cancel{S}\cos(\theta) \end{bmatrix}$

Scalling :- Zoom In $S > 1$
Zoom out $0 < S < 1$ Positiv S

اذا كانت ال S سالبة بصير عندي :-
Flippiag or miroring effect or reflection

$A^T A = \text{Identity} \leftarrow$ لل orthonormal $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^T = A^{-1}$

$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$

$A^{-1} = A^T = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$

$A = U D V^T$

$= U * I * D V^T$

$$\underbrace{(U V^T)}_{\text{final rotation}} (\underbrace{V}_{\text{cansel rotation initial}} \underbrace{D}_{\text{scalling}} \underbrace{V^T}_{\text{initial rotation}})$$

Similarity Transformation :-

كيف احكي ال matrix من ال Affine لل Similarity

من خلال ال orthogonal.

تحديش ال Dof للorthogonal = 2 ليش 2

لانه انا بدي اعرف قديش مقدار الزاوية اللي بدي اعملها rotation بالاضافة الى قيمة S فهيك بكون 2

$$H_{\text{similarity}} = \begin{bmatrix} \overset{A \to 2 Dof}{SR} & \overset{\to 2 Dof}{\vec{t}_{2\times1}} \\ \vec{0}_{1\times2} & 1 \end{bmatrix}$$

هون بال Similarity بدلنا ال $A_{2\times2}$ بال

orthognal و عدد ال Dof فيها = 2

وعدد ال Dof لل $t_{2\times1}$ = 2 $\leftarrow$ 4 = 2+2

فعدد ال Dof للSimilarity = 4

هلا بال Similarity ال S بتعمل اما Pure zoom In or zoon out

what stay Invariant :-

1. كل خصائص ال Affine
2. ال degree بتضل ثابتة ما بتتغير :

يعني لو كان عندي مربع رح يضل مربع بس اما يكبر او يصغر طيب ليش لانه Similarity يحافظ عل الزاوية تضل 13 بتة

(Shap and angles are preserved)

PL(3) → Projective Linear

↑ subgroup of

Affine group

↑ subgroup of

Similarity group

↑ subgroup of

Euclidean group

$$H = \begin{bmatrix} A_{2\times2} & \vec{t}_{2\times1} \\ \vec{V}_{1\times2} & 1 \end{bmatrix}$$

H is non singular → Projective شرط ال

$A_{2\times2}$ will Just need to be non-singular

and $\vec{V}_{2\times1} = [0,0]$ → Affine شرط ال

شو الاشي اللي ما بتغير بال Projective :-

Straight Line. will stay stright

8 = Dof عدد ← Pl(3) ال

6 = Dof ال عدد ← Affin ال

$$\text{Affine} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

* اشي كتير مهمة اذا عملت عمليات بين انواع مختلفة

ال Transformation الناتج بكون حسب الأقوى.

8 = Dof ← Pl(3) الناتج ← Affin x Pl(3) يعني

6 = Dof ← Affin الناتج ← Affin x Affin

Homography

- Set of all 3x3 non-singular Matrix
- vector multiplication Matrix

بتحقق كل شروط الجروب (Invers, Identity, clousre, associativity

Set of 3x3 → Pl(3) بنعبر عنهم ب

Projective Linear ↓

Affine ↓

Simility ↓

Eucludian

} كلهم عبارة عن non-singular 3x3 matrix

---

what stay Inverient under the Transformation :-

PL(3) → stright Line stay stright

Dof = 8 , $\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$ → هاي شكل ال H لل PL(3)

Affine → $\begin{bmatrix} A_{2\times2} & t_{2\times1} \\ V_{1\times2} & W \end{bmatrix}$ → هاي شكل ال matrix

احنا حكينا انه اقوى اشي ال Projective بعدها

Euclidean ← similarity ← Affin

Distortion الأقوى بشوه بال

هلأ كيف ؟ هنا بناخذ صورة من خلال ال Camera:

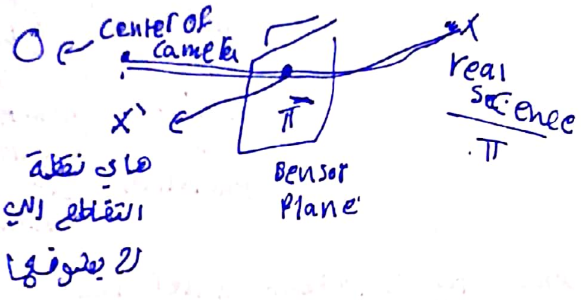
جوا ال camera في اشي اسمه center of Projection.

وفي Sensor Plane

(Sensor plane):- the place where the Image ~~[illegible]~~ is form.

هلأ الضوء رح يسقط من اي جسم ع Sensor Plane

اذا قاطع ال Sensor plane بنشوف الصورة



ال center of Projection شو بقابلها بال Humman Visual System :-

optic nerve

what are the classification of transformation categories :-

1- Projective 2- Affin 2- Similrty

4- Eneludine

Any 3X3 non-singular matrix → Projective

* لو اجي اضرب ال H باي constant ≠ بيساوي صفر رح يضل يعطيني نفس ال H ليش :؟

Since only ratios matte

Group:- عشان يكون عندي Group لازم يكون عندي :-

1- set of element 2- Defined operator (+ / x)

$g = \{(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)\}$

$(2,3,1) \circ (1,2,3) = (2,3,1)$

هون انه بناءً على ترتيب الارقام في اول group بدك اجيب الجزء التاني

$(1,2,3) \circ (3,2,1) = (3,2,1)$

بده اجيب ال Identity (3,2,1)

$(3,2,1) \circ (3,2,1) = (1,2,3)$

Inverse

لو طلبه ال Inverse هو اللي بعطيني ال Identity

ال Homography يعتبر انه group و ال operator هو (matrix vector ~~mult~~ multiplication

هاي اسمها GL(3)

لو كان عندي $H = K * [\quad]$

$H_1 \in H, H_2 \in H, H_3 \in H$

$H_1 * H_2 \in H$ → Closure

$H_1 * (H_2 * H_3) = (H_1 * H_2) * H_3$ Assoctivity

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * H_1 = H_1$$

→ Identity matrix

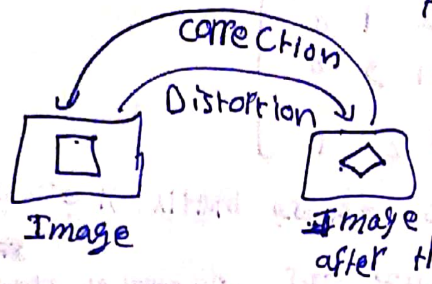
$H_1^{-1} * H_1 = H_1$

→ Inverse

كيف نتأكد انه فيه H_1^{-1} من ال H :؟

لما non-singular

How Estimate H projective to affine?



How such distortion image of view is obtained?

when you use your camer.

H → affin iff L_∞ mapping to L_∞

$\xrightarrow{①}$

$\xleftarrow{②}$

Prove :-

① consider the first direction

H is Affine = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

هلأ عشان اثبت انه L_∞ بضل L_∞ بعد ما اعمل Affine.

هلأ المعروف لو بدي اجيب ال Line الجديد بجيبه هيك

$$L' = H^{-T} L$$

طيب هلأ ال Line اللي موجود لا ∞ من شو متكون من ideal Point فلو قدرت اثبت انه ال ideal Point بتضل ideal بكون اثبت انه ال L_∞ بضل L_∞

$\vec{X'} = H^{-T} \vec{x}$ → هاي اسهل بدل ما اثبت ال Line

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ 0 \end{bmatrix}$$

consider second direction ?

L_∞ goes to $L_\infty \xrightarrow{\text{Show}}$ H (is affine)

هلأ هون بعكيلنا L_∞ بروح L_∞ بس لازم اثبت انه A ← non-singular و انه $\vec{V} = (0,0)$

$V = 1$

هلأ لازم اثبت انه $\vec{V} = (0,0)$

كيف باخذ نقطة ← $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ←

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ V_1 & V_2 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ V_1 \end{bmatrix}$$

Ideal Point along x axis.

و من السؤال هو حاكي انه L_∞ ← L_∞

∴ ideal Point ← ideal Point

∴ ناتج ضرب النقطة ال ideal رح يعطيني Ideal

∴ $V_1 = 0$

باخد كمان ideal Point بس along y-axis

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ V_1 & V_2 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ V_2 \end{bmatrix}$$

∴ $V_2 = 0$

وال V ← must be non zero because the A matrix is non-singular

بال Similarity :-

Shape and angles are preserved

2- distance they are not preserved

لانه بصير في Scalling

Eucluden :-

بحافظ على المسافات كمان الاشي الي بصير بال Eucluden هو ال pure rotation عشان هيك هو بعتمد على ال orthonormal

$$H_{Eucluden} = \begin{bmatrix} \overset{\text{orthonormal}}{\boxed{R}} & \vec{E} \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Affine} \quad \begin{bmatrix} \overset{\text{non-singular}}{A_{2x2}} & \vec{E} \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Similarty} = \begin{bmatrix} \overset{\text{orthogonal}}{SR} & \vec{E}_{2x1} \\ \vec{0}_{1x2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Euclouden} = \begin{bmatrix} \overset{\text{orthonormal}}{R} & \vec{E} \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix}$$

1 = Dof ← orthonormal لانه بس بدي اعرف قيمة الزاوية

3 = Dof ← بال Euclouden

Euclouden → preserved distance

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

عندي هاي ال matrix بدي اعرف اذا هي orthonormal او orthognal او Affin كيف بجيب det(A)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = (2\times2) - (1\times-1)$$
$$= 4+1 = 5$$

بما انها 5 يعني $\det(A) \neq 5$ يعني orthognal يعني Similarty

orthognal.

$\det(A) = \lambda = S.$

$A^TA = \lambda^2(I_{2x2}) \rightarrow$ Identity matrix

orthonormal

$\det(A) = 1$

$A^TA = I_{2x2}.$

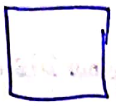
---

to removing the distortion.

requires knowing :-

1. distortion type (projective, Affine simlilirty, Eucluden)
2. estimating corresponding Homography

how to remove distoration :-



original Image

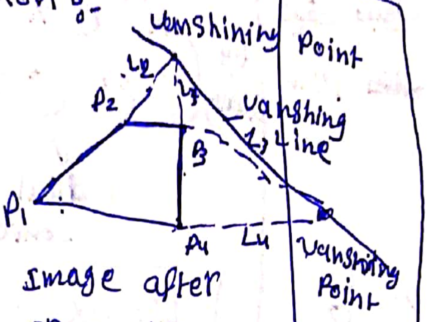


Image after Projective

هلأ لو نشوف بالصورة الاصلية في Parallel Line لما عملنا Projective بطلوا Parallel بس ضلوا ال Line يتقاطعوا بال Point اسمها Vanshing Point و ال Line اللي بمر بال Vanshing point اسمه Vanshing Line

* عشان اطلع ال Vanshing Line بعمل cross Product بين ال Vanshing point

$L_1 = P_4 \times P_3$

$L_2 = P_1 \times P_2$

$L_1 \times L_2 =$ vanshing Point 1

$L_4 = P_1 \times P_4$

$L_3 = P_2 \times P_3$

$L_4 \times L_3 =$ Vanshing Point 2

Vanshing Point 1 × Vanshing Point 2 = Vanshing Line (LV)

$$\vec{L_v} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}$$

شو فايدة ال Vanshing Line

او كيف اعمل Corection

بدي اعمل ال Transformation لل Vanshing Line ← ideal Line

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بدي الاقي H اللي بتحول ال LV الى L∞

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ L_1 & L_2 & L_3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{projective to Affine}$$

هاي اللي بتحول ال LV الى L∞

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ L_1 & L_2 & L_3 \end{bmatrix}$$

كيف بدي اثبت اله

هاي ال matrix اللي بتحول LV الى L∞

$$\vec{L}' = H^{-T} \vec{L}$$

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{L_1}{L_3} & -\frac{L_2}{L_3} & \frac{1}{L_3} \end{bmatrix} = H^{-1}$$

$$= H^{-T}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{L_1}{L_3} \\ 0 & 1 & -\frac{L_2}{L_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_3} \end{bmatrix}$$

$$\vec{L}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{L_1}{L_3} \\ 0 & 1 & -\frac{L_2}{L_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 - L_1 \\ L_2 - L_2 \\ 1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

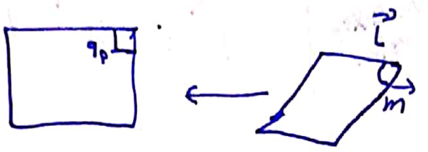
هاي ال H بقدر استخدم على Point وعلى Line وعلى conic عشان احولهم من projectiv لـ affine

* هلأ لما ارجع للAffine بكون عندي الangel مو محفوظة عشان ارجع ال angel الاصلية بدي ارجع لل similirty

كيف نحول من Affine ل Similirty :-

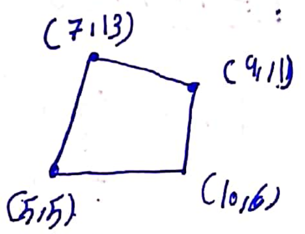
لازم ~~نخلي~~ ارجع ال angale لاصلها

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{L}^T \cdot \vec{m}}{|\vec{L}|\,|\vec{m}|}$$



$$\cos(90) = \frac{\vec{L}\cdot\vec{m}}{|\vec{L}|\,|\vec{m}|}$$

هدفي لازم اوجد H الي بخلي cos(θ) = صفر



لو بدي احوله من projective ل affine بنعوض

من L(v) ال L(∞) و بستخدم $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ L_1 & L_2 & L_3\end{bmatrix} = H$

~~tectify~~ / rectify → Correction

How to relate the homography to cos(θ) ?-

1- duality principle

* In HC points and line are duality

$$\left.\begin{array}{l} \text{Line } \vec{L} = \underbrace{\vec{x}_1 \times \vec{x}_2}_{\text{Point}} \\ \text{Point } \vec{x} = \underbrace{\vec{L}_1 \times \vec{L}_2}_{\text{Line}} \end{array}\right] \rightarrow \text{by duality}$$

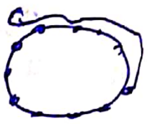
From duality, we can get intersting geometric entities.

$$\vec{x}^T C \vec{x} = 0$$

by duality $\vec{L}^T \underset{\text{dual conic}}{C^*} \vec{L} = 0$

هدول النقاط السوم

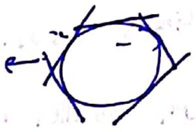
point conic



$$\boxed{\vec{L} = CX}$$

Line conic

هو نفسه ال tangent Line



How a conic transfor based on a given homography H?

$$C' = H^{-T} C H^{-1}$$

How to represent C^* in HC:-

Recall $L = CX \rightarrow \vec{x} = C^{-1}\vec{L}$

and $\vec{x}^T C \vec{x} = 0$

$$(C^{-1}\vec{L})^T C (C^{-1}\vec{L}) = 0$$

$$\vec{L}^T C^{-T} (C + (C^{-1}\vec{L}) = 0$$

$$\vec{L}^T C^{-T} \vec{L} = 0$$

C is symmetric then $C = C^T$

$$\vec{L}^T C^{-1} \vec{L} = 0$$

$\vec{L}^T C^* \vec{L} = 0$ لو اقارنها مع

$$C^* = C^{-1}$$

---

what about degenerate conic what will be the dual to it?

Apply duality

$$\left.\begin{array}{l} C = \vec{L}\vec{m}^T + \vec{m}\vec{L}^T \\ \underset{\text{dual point}}{C^*} = \vec{I}\vec{J}^T + \vec{J}\vec{I}^T \end{array}\right]$$

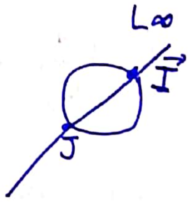
هون يعني بدل
ما اخذ بال Line
باخذ ال Point

$$C^* = \vec{I}\,\vec{J}^T + \vec{J}\,\vec{I}^T$$

Now what are the HC of the point $\vec{I}$ and J How to visualize C^* :-

it turned out that these point are very special, will call or refer to them as $\underbrace{\text{circular Points}}$

Intersection of an circle in a plane with line ∞



How to find $\vec{I}$ and $\vec{J}$?

Recall the Algebric equation of a circle and substitute the homogenos coordinate of a point $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

بنضيفها x_3

$$\underbrace{ax^2 + bxy + cy^2 + xd + ey + f = 0}$$

هاي المعادلة الرئيسية لل conic

كيف اخليها لل circle لازم تتحقق عدد من الشروط

لازم ال $b=0$, و $a=c$ ← و نفترض الزاوية $\theta=$

$d=0$, $e=0$

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + dx_1x_3 + ex_2x_3 + fx_3^2 = 0$$

مشان $\vec{x}$ تكون $\underset{\infty}{\text{to}}$ لازم ال $x_3=0$

فبطلع $a=c$, $b=0$, $\underbrace{d=0 , e=0}$

Because of having $x_3 = 0$

$$x_1^2 + x_2^2 = 0$$

$$x_1^2 = -x_2^2$$

$$x_1 = \pm\sqrt{-x_2^2}$$

$$= \pm j\, x_2$$

↳ Imagener number

$$x_2 = \pm j\, x_1$$

assum $x_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{I} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ +i \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{J}$$

Now we can find the equation of dual degenerate conic.

$$C^* = \vec{L}\,\vec{m}^T + \vec{m}\,\vec{L}^T$$

(by duality

$$C^*_\infty = \vec{I}\,\vec{J}^T + \vec{J}\,\vec{I}^T$$

$$= \underset{1\times 3}{\begin{bmatrix} 1 \\ +i \\ 0 \end{bmatrix}} \underset{3\times 1}{[1\ -j\ 0]} + \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix} [1\ +i\ 0]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -j & 0 \\ i & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{i \times j = 1}$$

$$C^*_\infty = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{dual degenrate conic}} \rightarrow \text{مهمة جداً جداً}$$

عشان اعمل remove لل projective و affine

لازم استخدم Vanishing Line .

* عشان احول من affine ل Similirity شو بعمل

بنستخدم ال ~~duality~~ duality degenrate conic.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

How to visulatize degenrate conic:

by Intersect the conic by plane ↓ (In a mile)

we visualize double conic

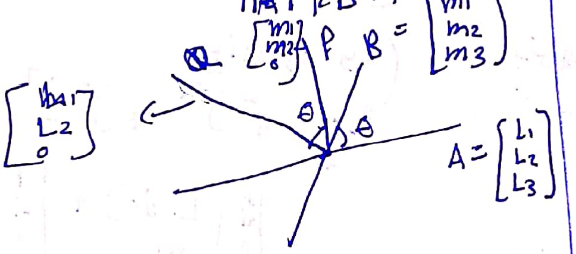
* degenrate conic:-

هما كل ال Lines الي passing بال I و ال J

بعبروا عن ال degenrate conic

كيف بنرجع من Affine ل Similarity من خلال الزاوية

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{A}^T \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \, \|\vec{B}\|}$$



هلأ ال last coordinate شو بأثر على ال line؟

$ax + by + \underline{c}$ c بمثل y-Intercpt

تقاطع الخط مع ال y

هلأ بحتاجلي لو اخذ العامودي على كل Line (A و B)

الزاوية بينهم = الزاوية بين A و B

العامودي (Q , P)

هلأ Q و P ال c الهم ٥ صفر لانهم بمروا بال origin

$$\cos(\theta) = \frac{[L_1 / L_2] \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}}{\sqrt{L_1^2 + L_2^2} \cdot \sqrt{m_1^2 + m_2^2}}$$

اللي خلاني اقدر اعمل $L_3 = m_3 = 0$ هو ال normal vector

كيف بقدر احول A و B ل Q و P باستخدام ال duality degenrate conic.

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{A}^T \vec{B}}{|A||B|} = \frac{\vec{l}^T \vec{m}}{|\vec{l}| \, |\vec{m}|}$$

$$\vec{A} = \vec{l} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{B} = \vec{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

هيك بكون حولت

$$[L_1 \; L_2 \; L_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} =$$

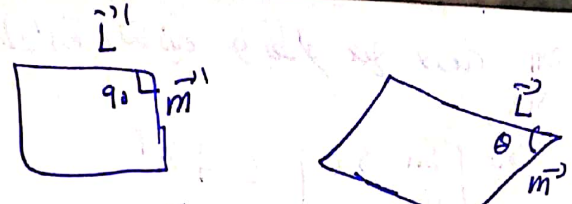
$$L_1 m_1 + L_2 m_2$$

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{l}^T C_\infty^* \vec{m}}{\sqrt{(\vec{l}^T C_\infty^* \vec{l})} \sqrt{(\vec{m}^T C_\infty^* \vec{m})}}$$

$\|\vec{l}\| \rightarrow$ هاد معناه normal

$$= \vec{l}^T \cdot \vec{l}$$

$$= [L_1 \; L_2 \; L_3] \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}$$



$$\vec{L}' = H^{-T}\vec{L} \rightarrow \vec{L} = H^{T}\vec{L}'$$

$$\vec{m}' = H^{-T}\vec{m} \rightarrow \vec{m} = H^{T}\vec{m}'$$

But how a conic transform :-

$$C' = H^{-T} C H^{-1}$$

what about dual conic → how it is transform :-

$$\underbrace{C^{*'} = H C^{*} H^{T}}_{\text{افق}}$$

This also applies to dual degenerate conic

$$C^{*'}_{\infty} = H C^{*}_{\infty} H^{T}$$

$$C^{*}_{\infty} = H^{-1} C^{*'}_{\infty} H^{-T}$$

$$\cos(\theta) = \vec{L}^{T} C^{*}_{\infty} \vec{m}$$

$$(H^{T}\vec{L}')^{T} \quad H^{-1} C^{*'}_{\infty} H^{-T} \quad H^{T}\vec{m}'$$

$$= \vec{L}'^{T} \underbrace{H \; H^{-1}} C^{*'}_{\infty} \underbrace{H^{-T} H^{T}} \vec{m}'$$

$$= \vec{L}^{T'} C^{*}_{\infty} \vec{m}' = \cos(90)$$

$$\vec{L}^{T'} C^{*}_{\infty} \vec{m}' = 0$$

هلأ بالصورة اللي فيها Affine عندي $\vec{m}$ و $\vec{L}$

لو اعمل dot product بين $\vec{m}$ و L رح اقدر اجيب

cos(θ)

لو اكتبهم باستخدام dual degenrate conic

رح يعطيني $\vec{L}^{T'} \underbrace{C^{*'}_{\infty}}_{\downarrow} \vec{m}' = 0$

برجع بعوض قيمتها

$$C^{*}_{\infty} = H C^{*}_{\infty} H^{T}$$

$$L^{T'} (H C^{*}_{\infty} H^{T}) \vec{m}' = 0$$

لازم ال H هيك تكون :-

$$H = \begin{bmatrix} A_{2x1} & \vec{t}_{2x1} \\ \vec{0}_{1x2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^{*}_{\infty} = \begin{bmatrix} I_{2x2} & \vec{0}_{2x1} \\ \vec{0}_{1x2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}^{\,I_{2x2}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 0 \end{bmatrix}$$

بطلع عنا

$$S_{11} I_2' m_1' + S_{12}(I_1' m_2' + I_2' m_2') + S_{22} I_2' m_2' = 0$$

$$S = A . A^{T} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

symmetric

$$S_{11} \neq S_{22} \qquad \boxed{S_{12} = S_{21}}$$

How many Dof of S

$$\left.\begin{matrix} S_{11} \\ S_{12} \\ S_{22} \end{matrix}\right] \rightarrow 2\text{Dof}$$

لانه بقسم ع S_{22}

becuse only retio matte

How many pair of line corresponding ?

2 orthogonal Line

$L^{*T} C^*_\infty m' = 0$

اي matrix بضربوا مع ال.. transpos

لل matrix

بعطيني symmetric matrix

$S = A A^T$ → is asymmitric matrix

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

$\boxed{S_{12} = S_{21}}$ $S_{11} \neq S_{22}$

unkoun parmeter = 3

$S_{12} = S_{21}$

S_{11}

S_{22}

by only retio matter . Dof = 2

$\vec{t}_{2\times1}$ → بنخليها = $\vec{0}$ لانه مابتأثر

بعملية التحويل Affine)

Similirty

$$(L_1' \; L_2' \; L_3') \begin{bmatrix} AA^T & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} m_1' \\ m_2' \\ m_3' \end{pmatrix} = 0$$

حولناه $L_3 = 0$

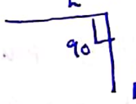
حولناه ∞ m2

$$(L_1' \; L_2') \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1' \\ m_2' \end{bmatrix} = 0$$

$$S_{11} I_1' m_1' + S_{12}(I_1' m_1' + I_2' m_1') + S_{22} I_2' m_2' = 0$$

$\vec{L}'$, $\vec{m}'$ → orthogonal

$\vec{L}' = \begin{bmatrix} L_1' \\ L_2' \\ L_3' \end{bmatrix}$



عشان الزاوية 90

طيب المعادلة فيها two Dof فانا بحاجة لتاني معادلة

need to identify another pair of

orthogonal Lines :-

Because each orthogonal line gives us 1 equation

يطلع ، لمعادلة التانيه ويطلع منها قيمة S_{11} S_{12}

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & 1 \end{bmatrix} = A A^T$$

how to find A from S

A → non-singular and positive definite

Positive definite :- انه ال matrix ال ~~det~~ Scaler الها اكبر من صفر

كيف يعني

$\vec{X}^T_{1\times2} \; \vec{A}_{2\times2} \; \vec{X}_{2\times1} = \square_{1\times1}$

هاد ال Scaler لازم يطلع اكبر من صفر

وال det لل matrix رح يكون الاكبر من صفر

لانه ال A ← non-singular رح يكون في

الها eigen value

$A = V D V^T$

هلأ بالاصل $A = U D V^T$ بس لانه nonsingular

فال $U = V$ ← لازم تكون orthonormal

$$A = \underbrace{U \; \underbrace{V^T V}_{I}}_{} D \, V^T$$

Final Rotation ↓ we can ignore

I

cancel the Intial Rotation

Scaling

Intial Rotation

this part by simply assume it to be the similarity distortion

$A = VDV^T$ لازم اعرف الV و D عشان اجيب A

$S = AA^T = (VDV^T)(VDV^T) = VD^2V^T$ بجيبهم من ال S

$A = A^T \rightarrow$ Symtric matrix

$$= V \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix} V^T$$

$D \rightarrow$ a digonal matrix $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

$$A = \underbrace{V \sqrt{D^2}\, V^T}_{\text{من خلال SVD}}$$

Positive - definit :- $\det(A) \cancel{>} 0$

$\downarrow$

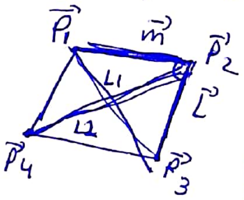
بس بتعمل Scalling

Negative - definit :- $\det(A) < 0$

بتعمل flipping او Reflection

orthogonal	orthonormal
Rotation, scalling.	Rotation
$\det(A) = s$ مقدار ال scalling $\det(A) \neq 1$	$\det(A) = 1$
$AA^T = s^2 I_{2x2}$	$AA^T = I_{2x2}$
$\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
DoF = 2	DoF = 1
$s \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin\theta \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta \end{bmatrix}$

لو اعطاني هاد السؤال :-



لازم اجيب ا two فبجيب :-
Coresponding line

$\vec{L}$ مع $\vec{m}$ رح يعطيني equation

L_2 مع L_1

عشان اجيب $\vec{L}$ $(\vec{P}_2 \times \vec{P}_3)$ و $\vec{m}$ $(\vec{P}_1 \times \vec{P}_2)$

$\vec{L}_1$ $(\vec{P}_1 \times \vec{P}_3)$ و L_2 $(\vec{P}_2 \times \vec{P}_4)$

صار عندي two equation بجيب منهم ال S

ومن ال S بجيب ال A

$$H = \begin{bmatrix} A & \vec{0} \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix}$$

3D :-

How can we capture world using 3D camera?

Examples of 3D camera

3D camera → give 3D geometric entites بتعطي وصف للاشياء بال 3D ـ

كيف بتقدر تطلع 3D geomtric :-

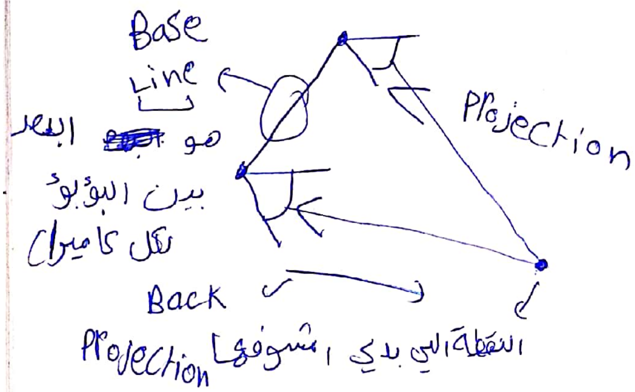
Recall Human Visual System
الاشي اللي احنا بنشوفة بتكون 3D

How / why ~~we~~ see 3D Image :-
because we have two eyes

عشان هيك انا بدي اصور الشي ويطلع بال 3D بدي اقل الشي at Least Two camera

more general we need at Least one camera and additional sensor. IR, Lese, Another camer

ليش احنا بحاجة two camer :-



هلأ ال Projection انه الضوء انعكس من النقطة على كل كاميرا اما ال Back Projection :-

What is the Back projection of a point in 3D ?
Line

هلأ بال Projection النقطة بترجع من 3D لـ 2D .

هلأ بال Back Projection ل 2D بصير النقطة خط مع line من كل كاميرا ووجود 2 camera بصير عندي twoLines هلأ ال 2 Line تقاطعهم بعطيني النقطة وين مكانها بالزبط

List the 3D geometric entites around us?

1- Points 2- Lines 3- Planes
4- spheres, ellipsoids, others
Quadrics اسمهم

What abut 2D geomatric entites?

1- Point 2- Lines 3- conics

~~2D~~	2D	3D
Homography	3x3 matrix.	

	2D	3D
Heomgraphy	3x3 matrix	$H_{4\times4}$ matrix
Point	$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ $x_1 = \frac{x_1}{x_3}$ $x_2 = \frac{x_2}{x_3}$	(x,y,z) $x_1 = \frac{x}{x_4}$ $x_2 = \frac{y}{x_4}$ $x_3 = \frac{z}{x_4}$ $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$
التحويل	بنحول من 2D الى 3D النقطة	بنحول من 3D الى 4D النقطة
	ال Line بنحوله من 3D الى 3D.	
Point	$\underbrace{\vec{x}' = H_{3\times3}\vec{x}_{3\times1}}_{\text{كيف بنحول النقطة}}$	$\vec{X}'_{4\times1} = H_{4\times4}\vec{X}_{4\times1}$

Heomgraphy → $H_{4\times4}$ →
- Projective
- Affine
- Similarity
- Ecludian

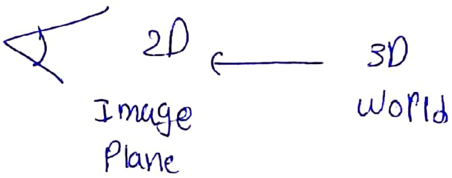
What the different between ideal point and vanshing point ?:-

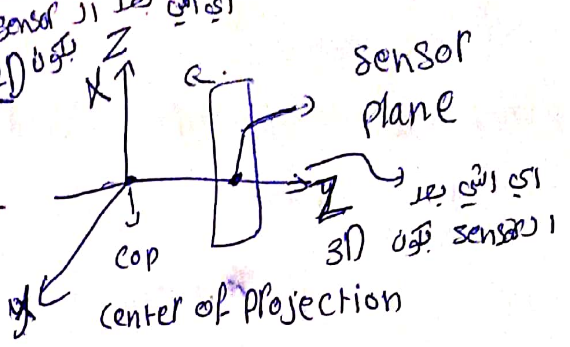
ideal point → Point at Infinty ∞

vanshing point → Point existing in the Image

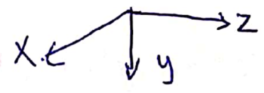
ideal point In 3D → $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\0\end{bmatrix}$

هلأ الكاميرا بتاخد ال 3D وبتعمله map ل 2D

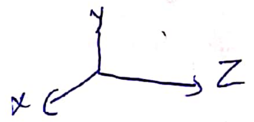


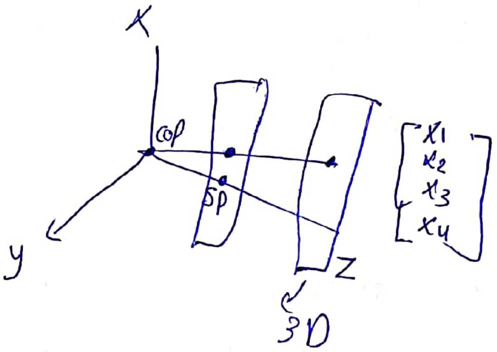


لو بدي اعمل rotation عل ال x



لو بدي اعمل rotation عل ال Z

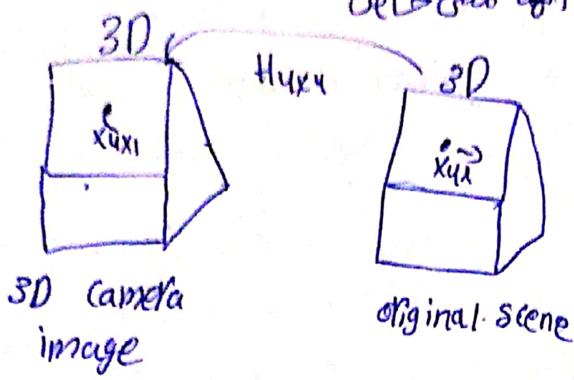




عشان تشوف النقطة الي موجودة عل ال 3D لازم تروح عل cop و تقطع ال sp بمكان ~~المكان~~ الي ~~[illegible]~~ قطعت فيه بكون الصورة بال 2D

$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ نقدر نمثل كل النقاط بال 3D باستثناء

الها هاي حالة



$\vec{x}'_{4\times1} = H\ \vec{x}_{4\times1}$ where $(x', \vec{x})$ is a correspond points

Recall in HC in 2D the equation of point $\vec{x}$ to reside on a Line $\vec{L}$

$\vec{L}^T \vec{X} = 0$ or $\vec{x}^T \vec{L} = 0$

by duality

* In 2D point and Line are dual

* In 3D point and plane are dual

for a point $\vec{x}$ in 3D to reside on a plane $\vec{\Pi}_{4\times1}$ it must satisfy the following Homegenus equation :-

* Any plane $\vec{\Pi}$ must have a normal vector : هو متجه بحدد اتجاه الplane بالنسبة : ل X و y و Z

(normal vector) $(\hat{n})$:-

cosine angles relative to the x, y and z major Axies + perprendicular distance to the origin along the normal vector $\hat{n}$ ✓

1 distance / 3 cos angale لل

4 = DoF لل plane لهيك عنا

مثال الطيار الي عنا angle 3 :-

1- Roll axis 2- Pitch axis 3- yow, angle

$\vec{N} = \begin{bmatrix}\vec{\Pi}_1\\\vec{\Pi}_2\\\vec{\Pi}_3\\\Pi_4\end{bmatrix}$, $\vec{x}_{4\times1} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$ ← نرجع لسؤالنا

$\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \rightarrow$ capture → cosine diraction

$\Pi_4 \rightarrow$ capture distance

$\underset{1\times4}{\vec{\Pi}^T}\ \underset{4\times1}{\vec{x}} = 0$ or $\vec{x}^T \vec{\Pi} = 0$

by dulality

$\vec{x} = (x, y, z)^T$ لو كان عندي هاي النقطة

$\vec{x}^T \cdot \hat{n} = d$

normal vector ↙ distance ↓

* النقطة تكون موجودة على ال plane .

$\hat{n} = (n_x, n_y, n_z) \rightarrow$ cosine angle

$\vec{x}^T \cdot \hat{n} = d.$ ← لو اجي اضرب بطلع هيك

$[x\ y\ z] \begin{bmatrix}n_x\\n_y\\n_z\end{bmatrix} - d = 0$

$x \underset{\Pi_1}{\boxed{n_x}} + y \underset{\Pi_2}{\boxed{n_y}} + z \underset{\Pi_3}{\boxed{n_z}} \underset{\Pi_4}{\boxed{-d}} = 0$

$\Pi_1 x + \Pi_2 y + \Pi_3 z - \Pi_4 = 0$

$[\Pi_1\ \Pi_2\ \Pi_3\ \Pi_4] \begin{bmatrix}x\\y\\z\\1\end{bmatrix} = 0$

هي نفسها

$\vec{\Pi}^T \vec{x} = 0.$

$$d = \frac{\pi_4}{\underbrace{\sqrt{\pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2}}_{\downarrow}}$$

واذا كانوا unit بدنا هدول
قيمتهم تكون (1)

Eular angles : Pitch / yew / Roll

Yaw → around z axis

Pitch → y - axis

Roll → x - axis

$[\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3 \ \pi_4]^T$ → Heomgeunse Coordant ~~Cto~~ for plane

what is the Pay of HC In 2D	3D.
Intersection between $\vec{L_1}, \vec{L_2}$ $\vec{x} = \vec{L_1} \times \vec{L_2}$ $\vec{L} = x_1 \times x_2.$ 3- Tangent Line is given by $\vec{L} = C\vec{x}.$ $\swarrow$ coine $\underbrace{\vec{x}^T C \vec{x}}=0$ نقطة موجودة عال conic	give 3 points we can compute the plane passing ~~thro~~ throug give 3 Planes we can compute. Intersection Point.

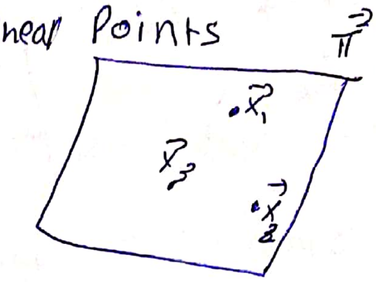
Recall How many points are needed in 2D to define a Line

Two Point / Points and. Line dual

How many Point in 3D needed to define. a Plane?

3 $\downarrow$ collinear Points

non-



بما انه x_1 و x_2 و x_3 موجودين عال Plane

∴ بقدر احكي هيك

$\vec{x_1}^T \pi = 0$

$\vec{x_2}^T \pi = 0$, $\vec{x_3}^T \pi = 0$

Can we group and. write such equations as a matrix. vector multiplication.

yes

كل واحد عبارة عن 4 عناصر

$$\begin{bmatrix} \vec{x_1}^T \\ \vec{x_2}^T \\ \vec{x_3}^T \end{bmatrix}_{3\times4} \vec{\pi}_{4\times1} = \vec{0}_{3\times1}$$

$$A_{3\times4} \vec{\pi} = \vec{0}$$

equation of the plane. Joining Contaning the Points $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}$ is the null space. of matrix

يعني اذا ~~[illegible]~~ اعطاني 3 نقاط بقدر من خلالهم اطلع ال Plane كيف من خلال انه اجيب ال null space للmatrix

what if we apply duality Principle:-

$$\begin{bmatrix} \vec{\pi_1}^T \\ \vec{\pi_2}^T \\ \vec{\pi_3}^T \end{bmatrix}_{3\times4} \vec{x}_{4\times1} = \vec{0}_{3\times1}$$

What does it mean $\vec{\pi_1}, \vec{\pi_2}, \vec{\pi_3}$

$\vec{x}_{4\times1}$ → Intersection Point of 3 Plane $\vec{\pi_1}, \vec{\pi_2}, \vec{\pi_3}$

columns → # of unkonows

Rows ↓ # of equations $\left[\quad \right]_{M_{3x4}}$ $\vec{X}_{4x1}$

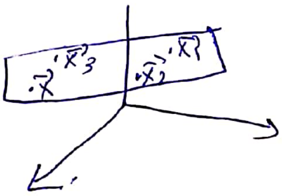
هون تكون unknaws

underdetermined. - System when we have number of equation Les than number of unknows.

Size of null space = # of unknows - # of equation

4-3 = 1 / Rank = # of equation

طريقة حساب الـ null space :-



$\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}$ → non-collinear point in plane

Linear combination of these 3 points define any arbitrary point $\vec{x}$ in the plane.

$$\vec{X} = c_1 \vec{x_1} + c_2 \vec{x_2} + c_3 \vec{x_3}$$

c_1, c_2, c_3 → any constant (±)

$\vec{X}$ → is Linearly denpended on $\vec{x_1}, x_2, x_3$

↓

$$M = [\vec{X}_{4x4}, \vec{X_1}, \vec{X_2}, \vec{X_3}]$$

Rank of M = 3 → # of Linearly Independed.

M → is singluar → 3 = Rank لانو

$\det(M) = 0$

$\vec{X}$ → Linearly denpended vector

x_1, x_2, x_3 → Linearly Indepened Point

Size of Null Space = 1

= # of Linearly denpended vector of point

$$M = \begin{bmatrix} x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \\ w & w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

Varibales   Known values

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

$\det(M) =$

$x \cdot D_{234} - y \cdot D_{134} + z \cdot D_{124} - w \cdot D_{123} = 0$

$$D_{ijk} = \begin{bmatrix} \text{Row} \\ \text{Row} \\ \text{Row.} \end{bmatrix}_{3x3}$$

بعد ، اكتبوهاي هيك :-

$$X^T \Pi = [x\,y\,z\,w] \begin{bmatrix} D_{234} \\ -D_{134} \\ D_{124} \\ -D_{123} \end{bmatrix}$$

لو كان عندي X_1, X_2, X_3 (at ∞)

بطلع عندي $0 = D_{124}, D_{134} \neq D_{234}$

بس $0 \neq D_{123}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ال Plane الي بمر بالنقاط الي موجوده at∞

هو Plane ← at ∞

2D	3D
How a Plane $\vec{\pi}$ transform :-	How Line transform :-
$\vec{\pi}' = \cancel{\pi} H^{-T} \pi$	$\vec{L}' = H^{-T} \vec{L}$

كل اشي بنطبق عله ال Line بال 2D بنطبقه

ال Plane ← بال 3D

Recall $\vec{x}' = H\vec{x}$

the $\vec{x} = H^{-1}\vec{x}'$

Recall $\vec{\pi}^{T} \vec{x} = 0$

$$\vec{\pi}'^{T} \vec{x}' = 0$$

$$\vec{\pi}^{T} (\underbrace{H^{-1}\vec{x}'}) = 0$$

عوضنا مكان $\vec{x}$

لو اقارن المعادلتين مع بعض

$$\pi^{T} = \vec{\pi}'^{T} \cancel{H}^{-1}$$

رح الاقي انه

لو اخد T للكل

$$\pi = H^{-T} \vec{\pi}'$$

$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \rightarrow$ Plane at ∞ / $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \rightarrow$ Line at ∞

Line and Point are dual at 2D, Plane and Point are dual at 3D.

Representing Line in 3D using HC :-

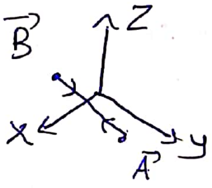
Recall to have a Line we need at Least Two Points.

assum the Points are $\vec{A}$ and $\vec{B} \in HC$

How many Dof of $\vec{A}$ ~~in~~ 3D = 3

How many Dof of $\vec{B}$ in 3D = 3

هلا ألمفروض لانه ال Line بحتاج two Point مسك تكون Dof لل Line يساوي 6 بس بالحقيقة ال Dof للLine = 4 :



هلا النقطة A و B بقدر احركهم وهاد الاشي بخلي ال Dof لل Line يقل من 6 الى 4

Points on the Line are invertint to translation This helps in Reducing the number of Dof of Line from 6 to 4

هلا ال Line با 3D بحتاج الى 4 coordarent عشان نمثل بال Physical و لما نيجي على HC بصيروا 5

* 4 Dof In Physical → 5 ~~D~~ In HC

بينما ال Point و ال Plane بحتاجوا الى 4 فقط بال HC

Point 3 In Physical → 4 In HC

Plane 4 In Physical → 4 In HC

لذ، ال Line بفرق عن ال Plane و ال Point بانه بحتاج الى 5 coordanint عشان امثله بال HC و هاد بسبب مشكلة

$$L \in R^4 \text{ In Physical} \qquad L \in R^5 \text{ In HC}$$

$$\begin{bmatrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\\L_5\end{bmatrix}$$

$$\text{Point} \in R^3 \text{ In Physical} \qquad \text{Point} \in R^4 \text{ In HC}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}$$

$$\text{Plane} \in R^4 \text{ In Physical} \qquad \text{Plane} \in R^4 \text{ In HC}$$

$$\begin{bmatrix}\pi_1\\\pi_2\\\pi_3\\\pi_4\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}\pi_1\\\pi_2\\\pi_3\\\pi_4\end{bmatrix}$$

Is $\begin{bmatrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\\L_5\end{bmatrix}$ consistant with HC of Point and Plane In 3D?

No, ~~Solutions~~

* Solutions to make it compatable?

Several Representation of a Line :-

1- Span of two vectors (Points of Plane)

2- Plucker - coordainate

3- Plucker - matrix

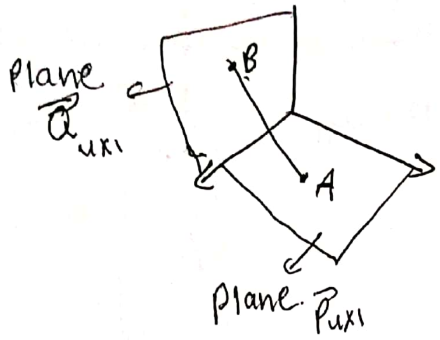
* underdetermined - System :-

# of unknows ~~less~~ more than equations

* overdetermined - System :-

# of equations more than unknows

Line of a vector span :-



* لو كان عندي نقطتين A و B و A و B موجودة عل ال plane (P) و B موجودة عل ال plane (Q)

فلو بدي اعبر عن ال Line الي بمر ب A و B :-
بستخدم طريقة Line as a span of two vectors (Point (A and B)) :-

$$w = \begin{bmatrix} \vec{A}^T_{1\times4} \\ \vec{B}^T_{1\times4} \end{bmatrix}_{2\times4}$$

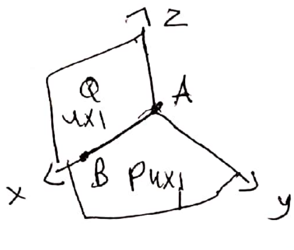
هلأ هاي ال matrix هل هي overdeterimate او underdeterimante :-

underdetermainate matrix
لان عدد ال equation = 2 و عدد ال unknows = 4

unknows > # equations

Size of null space = 4 - 2 = 2

لو كانت عندي



$\vec{A}^T P = 0$, $\vec{A}^T_Q = 0$ / $\vec{B}^T P = 0$ / $\vec{B}^T Q = 0$

هلأ ال Line هاد اما بعتبر بمر بنقطتين او بعتبر ناتج من تقاطع كل ال Planes :-

هلأ A واقعة عل plane Q و عل ال plane P مشان هيك رح تحقق معادلاتهم كيف $\vec{A}^T P = 0$ / $\vec{A}^T Q = 0$
ونفس الاشي B ← $\vec{B}^T P = 0$ / $\vec{B}^T Q = 0$

* هلأ لو بدي اطلع ال Line co spane with plane :-

شو بعمل بطلع ال duality لانه ال Points و ال Planes ← are dual :-

$$w^* = \begin{bmatrix} P^T \\ Q^T \end{bmatrix}$$

شو العلاقة بين w^* و w :-

$$w_* w^{*T} = \underbrace{\begin{bmatrix} A^T \\ B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & Q \end{bmatrix}}_{\text{outer of Product}} =$$

$$\begin{bmatrix} A^T P & A^T Q \\ B^T P & B^T Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$w^* \rightarrow$ size of null space = 2

Do the null space of w and w* means anything to us?

$$w_{2\times4} \; \underbrace{P_{4\times1}}_{\text{Let this be the null space vector we are Looking for :-}} = 0 \rightarrow$$

ليش صفر لانه null space لما اضرب ال matrix ب variable دائم يساوي صفر

yes, when we use w the null space means plane, when we ~~the~~ use w* the null space means Points A, B

Exp:-

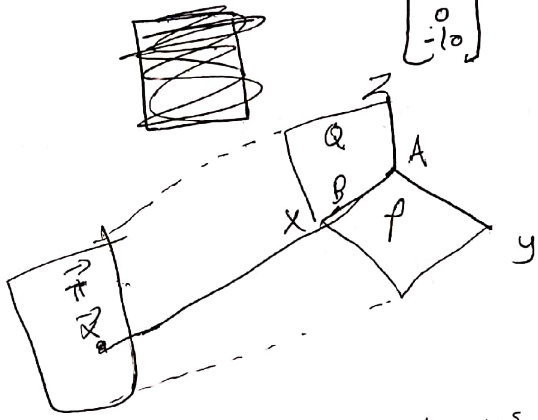
$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ عندي two points :-

* ملاحظة مهمة لو كان عندي two plane بقدر من خلالهم اجيب two point الي واقعين على ال two plane كيف من خلال اجيب ال null space لل $w^* = \begin{bmatrix} P^T \\ Q^T \end{bmatrix}$

واذا كان بدي اجيب ال two plane هو عبارة عن ال null space لل ~~two Point~~ $w \leftarrow w = \begin{bmatrix} A^T \\ Q^T \end{bmatrix}$

نكمل على السؤال اعطاني كمان معادلة ال Plane

$\pi = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix}$



السؤال طالب انه جيب هاد ال Line الي ناتج A و B وين رح يقاطع ال Plane π :-

* هلأ طريقة الحل انه لو امد ال Plane بصير عندي 3 Plane (P, Q, π) (P,Q) لو اخذ ال null space الهم رح يساوي النقطة x

$\begin{bmatrix} P^T \\ Q^T \\ \pi^T \end{bmatrix} \vec{x} = 0.$

كيف بدي اجيب P و Q عادي انا معي نقطتين A و B هدول النقطتين بقدر من خلالهم اجيب P و Q باخذ ال null space للنقطتين بطلع عندي P و Q

$w = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

بدنا نجيب ال null space :-

ال null spce = 2 = size of ال null spce دول = P

تاني null space = Q

لما عملت ال null space طلعت قيمة

$P = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ / $Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

هلأ بنرجع نعوض $\begin{bmatrix} P^T \\ Q^T \\ \pi^T \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0_{3\times1}$

$\vec{x} = \begin{bmatrix} D_{234} \\ -D_{134} \\ D_{124} \\ -D_{123} \end{bmatrix}$

Line with Pluker matrix:-

انه لو كان عندي two point رح اعبر عن ال plane بالطريقة التالية:-

$L = \underbrace{\vec{A}}_{4\times1} \underbrace{\vec{B}^T}_{1\times4} - \underbrace{\vec{B}\,\vec{A}^T}_{\text{outer product matrix}}$

$\boxed{\text{Rank} = 1}$

ال matrix الناتجة حجمها = 4x4

و ما الها determaint

طبعا هاي ال matrix ← singular

لما اطرح ال two matrix بتطلع عندي

matrix ← 4x4 و singular

كيف اطلع من A و B ال matrix L :-

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} , B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

det $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ عاد بحسبها　　det $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & \underbrace{a_1b_2 - 2b_1a_2} & a_1b_3 - b_1a_3 & a_1 - b_1 \\ 2b_1a_2 - a_1b_2 & 0 & \underbrace{a_2b_3 - b_2a_3} & a_2 - b_2 \\ a_3b_1 - b_3a_1 & a_3b_2 - b_3a_2 & 0 & a_3 - b_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 & 0 \end{bmatrix}$$

det $\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}$ من

$a_1 - b_1 \rightarrow$ عادي بطرح
$a_2 - b_2$　　　　　Row عل
$a_3 - b_3$

How to find $L^* \rightarrow$ لو ما كان
معنا P و Q
كيف بدي اجيب L^* من السؤال السابق
من خلال اجيب ال null space لل W
هيك بكون جبت P و Q ومن P و Q
بحسب ال L^* ،　$W = \begin{bmatrix} A^T \\ B^T \end{bmatrix}$

EXP:- لو طلب ال Pluker matrix لل x axis

كيف راح احل :- عشان اجيب L
انا محتاجة اني اجيب A و B كيف من خلال
اخذ A نقطة ال origin = $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

و B = $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ← نقطة على ال x-axis

و ال Rank لل matrix الناتج = 2
و det(matrix) = صفر

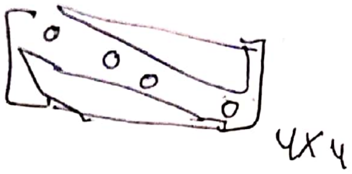
* هلأ بال degenrate conic لل matrix الناتجة
من $L^T m + m^T L$ ← Rank = 2 / Symmetric

* اما ال matrix الناتجة من $\vec{A} B^T - B A^T$
· Skew-Symmetric

شو الفرق بين ال Symmetric و ال Skew Symmetric

هلأ بال Symmetric بكون ال upper نفس ال lower

اما بال Skew-Symmetric هيك بكون



~~جزء~~ الجزء السفلي ال lower = - upper

* By Duality

$$L^* = \underbrace{Q \cdot P^T - P Q^T}_{plane}$$

How many Dof L → الناتجة
:- Dof = 6 → Do we have more constrate reduce # of Dof :-
yes

$$A = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

عشان اطلع L هيك بطلعها

$$L = A \cdot B^T - B A^T$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & \det\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} & \det\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} & A_1 - B_1 \\ -\det\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} & 0 & \det\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} & A_2 - B_2 \\ -\det\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} & -\det\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} & 0 & A_3 - B_3 \\ B_1 - A_1 & B_2 - A_2 & B_3 - A_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pluker coordinates:-

$$\begin{bmatrix} 0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ -s_1 & 0 & s_4 & s_5 \\ -s_2 & -s_4 & 0 & s_6 \\ -s_3 & -s_5 & -s_6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{L} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{bmatrix}_{6\times1}$$

How Dof of L = 6

كيف بتقدر تقلل من Dof

$\det(L) = 0$

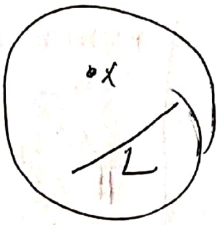
$Dof' = 5$

$\downarrow$

only retio mater Dof = 4

$$\det(L) = \delta_1 \delta_6 + \delta_2 \delta_5 + \delta_3 \delta_4 = 0$$

لو كان عندي نقطة وكان عندي Line هل بقدر اعرف معادلة ال Plane الي بجمعهم :-



$$\vec{\pi} = L^* \vec{X} \rightarrow \text{Pluker matrix}$$

How Line transform:-

$$L' = H L H^T$$

Quadrics:-

$$\underset{1\times4}{X^T} \; \underset{4\times4}{Q} \; \underset{4\times1}{X} = \underset{1\times1}{\vec{0}}$$

← نفس تمثيل ال Conic

عشان اعرف اذا هاي النقطة واقعة عال Quadric او لا بعوضها بالمعادلة الي فوق اذا جابت صفر بتكون واقعة اذا لا مابتكون واقعة.

$$Q' = H^{-T} Q H^{-1}$$

How Transform:- زي ال Conic.

Quadric:- 1-Sphere 2-ellipsoid ...-

Any 4x4 matrix whose, rank=4 and non-Singular → non-degenrate Quadric

degenrate Quadric → Rank < 4

Singular det(Q) = 0 / Symmtric

هلأ بال Conic كان عندي tangent Line

$L = CX$

بال Quadric عندي tangent Plane.

$\pi = QX.$

by duality →

$x^T C . \vec{x} = 0$

↓ duality

$\vec{L}^T C^{-1} \vec{L} = 0$

Point Quadric

$\vec{x}^T Q \vec{x} = 0$

$$\vec{\pi}^T \underbrace{Q^{-1}}_{Q^* \text{ dual Quadrics}} \vec{\pi} = 0$$

How conic. dual conic transform:

$C' = H^{-T} C H^{-1}$

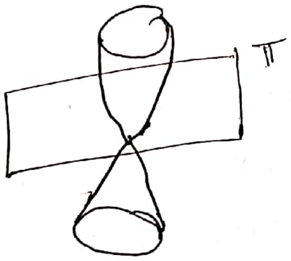
$C^{*'} = H C^* H^T$

How a Quadrics / dual Quadrics transform:-

$Q' = H^{-T} Q H^{-1}$

$Q^{*'} = H Q^* H^T$

Recall:- How we obtained a conic geomatric. entites:-



dauble cone is a Quadrics

$$\underset{3\times3}{C} = \underset{3\times4}{M^T} \underset{4\times4}{Q} \underset{4\times3}{M}$$

But what is M:-

$\pi = [a\ b\ c\ d]^T$ رح نعبر عن π بنقاط

$$M = \begin{bmatrix} -b/a & -c/a & -d/a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Absolute conic:- its Important is very much similar to the Impoprant of circular point.

↓

dual degentake conic طلعت من ال Circular Point

$$C^*_\infty = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

used in our analysis, where we drived. the Rectification Heomgraphy from affine to similarity

Absolute conic:- will be very usefull tool in ~~what~~ camera calibration

↓

deterime Intrinsic and extrainsic camera prametra

* dual degenrate quardric $Q^* = \Omega^*_\infty$ → located at infinity

$$\Omega^*_\infty = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

↓

Absolute dual Quadric

this is a Quadric

if we intersect with Plane at ∞ the result

* لما كان عندي conic وقطعته بـ L_∞ طلع عندي circlur Point I, J

$I = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}$

if we have Quardric Q and Intersect it with Plane at∞ π_∞ :-

the Result will be an absolute conic

$$\vec{\Omega}_\infty = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

absulute conic

* بال 2D عندي dual degenerate conic وبال 3D

• عندي dual degenerate Quadric

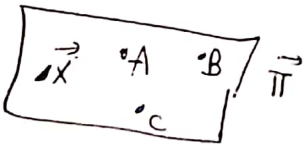
Absolute conic (Ω_∞) :- Intersection of spher with plane at ∞

$$\Omega_\infty = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{array}{ccc} A & b & C \\ \left[-b/a \right. & -c/a & \left. -d/a \right] \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \leftarrow M \text{ نرجع لل } *$$

$M = [A \quad b \quad C]$

A , b , C → non-coollinear point at plane



~~X = dA + d2B + d3C~~

$X = uA + vB + wC$

وهلأ $M_{3x4} \leftarrow [A_{4x1} \quad B_{4x1} \quad C_{4x1}]_{4x3} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \rightarrow$ بقدر اسميه هاد $\vec{P}_{3x1}$

$$\vec{x}_{4x1} = M_{4x3} \vec{P}_{3x1}$$

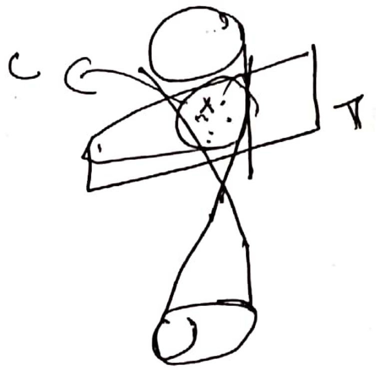
Recall the equation of a Quadric Q . $\vec{X}^T Q \vec{X} = 0$

assum $\vec{X}$ exsist on the Quadric

$$(M_{4x3} P_{3x1})^T Q_{4x4} (M_{4x3} P_{3x1}) = 0$$

$$\vec{P}^T_{1x3} \underbrace{M^T_{3x4} \; Q_{4x4} \; M_{4x3}}_{C_{3x3}} \vec{P}_{3x1} = 0$$

$$C_{3x3} = M^T_{3x4} \; Q \, . \, M_{4x3}$$



* هلأ x نقطة موجودة على ال Conic الناتج من تقاطع ال Plane مع ال Quardric

prove $Q^{-1} = H^{-T} Q H^{-1}$

هلأ عندي ال

$X = H^{-1} X' \leftarrow X' = HX$

$$X^T Q X = 0$$

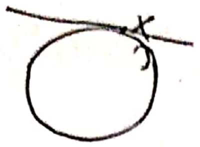
$$(H^{-1} X')^T Q (H^{-1} X') = 0$$

$$X'^T H^{-T} Q H^{-1} X' = 0$$

بنقارن بنلاقي

$$Q' = H^{-T} Q H^{-1}$$

Recall how we derived the tangent line for a conic C at a peramter point $\vec{x}$



$$\vec{L}^T \cdot \vec{x} = 0$$

$$x^T C x = 0$$

Symmtri $C = C^T$

$$L = Cx$$

$$(Cx)^T \vec{x} = 0$$

$$\leftarrow x^T C^T \vec{x} = 0 \#$$

$\pi = Qx$

Show the equation of a tangent plane. $\pi = Qx$

$$\pi^T x = 0$$

$$x^T Q x = 0$$

Substuation π in $\pi^T x = 0$

$$(Qx)^T x = 0 \rightarrow x^T Q^T x = 0$$

Q is symmtric then $Q^T = Q$

$$x^T Q x = 0 \#$$

Recall when we appied. the duality principle to the point conic ?

$$x^T C \vec{x} = 0$$

by duality

$$L^T \underset{C^*}{C^*} \vec{L} = 0$$

wher $L = Cx \rightarrow x = C^{-1} L$

$$(C^{-1}L)^T C (C^{-1}L) = 0$$

$$L^T C^{-T} \cancel{C} \cancel{C^{-1}} L = 0 \rightarrow$$

$$L^T C^{-T} L = 0$$

$C = C^T$

$$L^T C^{-1} L = 0$$

$$C^* = C^{-1}$$

---

* Show that dual Quadric Q^* heomgenuse equation. is give by Q^{-1} :-

Recall $\vec{x}^T Q \vec{x} = 0$

by dualty

$$\vec{\pi}^T Q^* \vec{\pi} = 0$$

$$\pi = Qx \rightarrow x = Q^{-1} \pi$$

Subsetuation

$$(Q^{-1}\pi)^T Q (Q^{-1}\pi) = 0$$

$$\pi^T Q^{-T} \cancel{Q} \cancel{Q^{-1}} \pi = 0$$

$Q^T = Q$ $\quad \pi^T Q^{-1} \pi = 0$

$$\# \; Q^* = Q^{-1}$$

---

derive how a dual Quadric transform

$$Q^* \xrightarrow{H} Q^{*'}$$

$$\pi^T Q^* \vec{\pi} = 0 \quad ①$$

$$\pi'^T Q^{*'} \vec{\pi}' = 0 \quad ②$$

Recall how a plane π transforms.

$$\vec{\pi}' = H^{-T} \vec{\pi} \rightarrow \underbrace{\vec{\pi} = H^T \pi'}_{} \rightarrow ③$$

Substiture ③ in 1

$$(H^T \pi')^T Q^* (H^T \pi') = 0$$

$$\pi'^T H Q^* H^T \vec{\pi}' = 0$$

$$Q^{*'} = H Q^* H^T$$

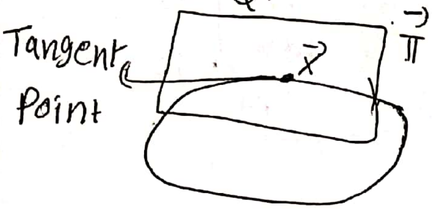
	2D	3D
	$H = \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{matrix}}^{A} & \overbrace{\begin{matrix} h_{13} \\ h_{23} \end{matrix}}^{\vec{t}} \\ \underbrace{\begin{matrix} h_{31} & h_{32} \end{matrix}}_{\vec{v}^T} & \underbrace{h_{33}}_{v} \end{bmatrix}_{3\times3}$	$H = \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{matrix}}^{A_{3\times3}} & \overbrace{\begin{matrix} h_{14} \\ h_{24} \\ h_{34} \end{matrix}}^{t_{3\times1}} \\ \underbrace{\begin{matrix} h_{41} & h_{42} & h_{43} \end{matrix}}_{V^T_{1\times3}} & \underbrace{h_{44}}_{V_{1\times1}} \end{bmatrix}_{4\times4}$
Projective	Dof = 8, conditions:- H is non Singular matrix. Rank=3 Stright Line stay Stright	Dof =15, conditions:- H is non singular Inverdients:- Stright Line stay Stright
Affine	DOF = 6 condition: A is non singular matrix, $\vec{v}^T = 00 / v = 1$ Parallel Line Stay Parallel	Dof = 12 condition:- A is non-singular $v^T = [0\ 0\ 0]$ $v = 1$ parallel Plane stay parallel
Similarity	Dof = 4 condition:- A is orthogonal Preseved angale $AA^T = \lambda^2 I$ / λ → is otropic scaling	Dof = 7 → 3 Rotation / 1 Isotropic scaling codition:- A is orthognal $A^TA = \lambda^2 I$ same 2D
Ecludian	Dof = 3 condition:- A is orthonormal Preseved distance $AA^T = I$	Dof = 6 → 3 Rotation codition:- A is orthonormal $A^TA = I$ / same 2D
	Pure Affine = Affine - Similarity = 6 - 4 = 2	Pure Affine disturation = Affine - Similarity = 12 - 7 = 5 differential effect → differant Scalling on differant direction Exp:- compression + stretching

Isotropic Scaling:- either zoom In or Zoom out

Recall the tangent plane - $\vec{\pi}$

Homogense equation :-

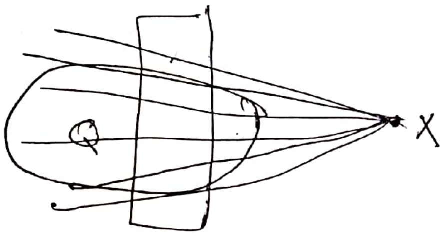
$$\vec{\pi} = Q\vec{x}$$



Now what if $\vec{x}$ was not a Perinater Point on Q.

- for example $\vec{x}$ was outside Q

In this can we still have a Valid meaning of $Q\vec{x}$:- yes



ده ال X بقدر اجيب كل ال tangent Line لل Quadric

وهاد رح يولد plane ← اسمه Polar Plane

we shell refer to this entity as Polar Plane

compare it with tangent Plane $Q\vec{x}$

tangent Plane → x exisit In Q

Polar Plane → x outside Q

وبنفس الطريقة عنا Polar Line لل conic

The Absolute conis :-

is the Intersection of any sphere with Plane at ∞ π_∞.

circular point :- Intersection of any circle with line at ∞ L_∞.

$$\Omega_\infty = I_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[x_1\ x_2\ x_3] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Conic equation} \\ \Omega_\infty}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

asolut dual quadric

$$\Omega_\infty^* = \begin{bmatrix} I_{3\times3} & \vec{0}_{3\times1} \\ \vec{0}^T_{1\times3} & 0 \end{bmatrix}$$

$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

$$x^T C x = 0$$

$$x = H^{-1} x'$$

$(H^{-1} x')$

$A_{8\times 9}\, h = 0$

0

$l_\infty \to l_\infty$

$l_\infty \to \begin{bmatrix} l_\infty \\ 0 \quad 0 \quad 1 \end{bmatrix}$

l_∞

L_∞

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \; \\ \; \\ 0 \end{bmatrix}$$

$U_1 = 0$

$U_1 \quad 0 \quad 0 =$

---

idea

$L_\infty \quad L_\infty$

U_1

$H^{-1} H$

$= H$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix}$$

$H = K^{*} R' K^{-1}$

$P \triangleq K' R' (KR)^{-1} P$

$\cancel{K^{-1} K}$

$H = K' K^{-1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix}$$

$C^*_\infty = \vec{I}\vec{J}^T + \vec{J}\vec{I}^T$

AA^T

$\underline{\lambda = -2} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$

$x_1 - x_2 = 0 \quad x_1 = x_2$

$x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow$

$\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$

$x_1 + 4x_2 = 0$

$x_1 = -4x_2$

$x_2 = \frac{-1}{4} \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$

$x' = H x \quad X = H^{-1} X'$

$L^T X' = 0 \quad / L'^T X' = 0$

$X^T L = 0$

$L' = H^{-T} L$

$L^T X = 0 \quad X^T L = 0$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$i(0) - j(0 - 1) + k(0)$

$\begin{bmatrix} 0 \\ +1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad y = 0$

⑤

$C = \begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} & d/2 \\ \frac{b}{2} & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix}$

$\tilde{x}^T C \tilde{x} = 0$

$C' = H^{-T} C H^{-1}$

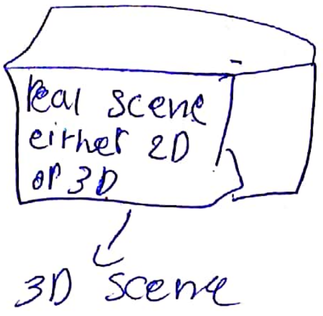
$\boxed{C_{3\times3} = l m^T + m l^T}$

$L = ex$

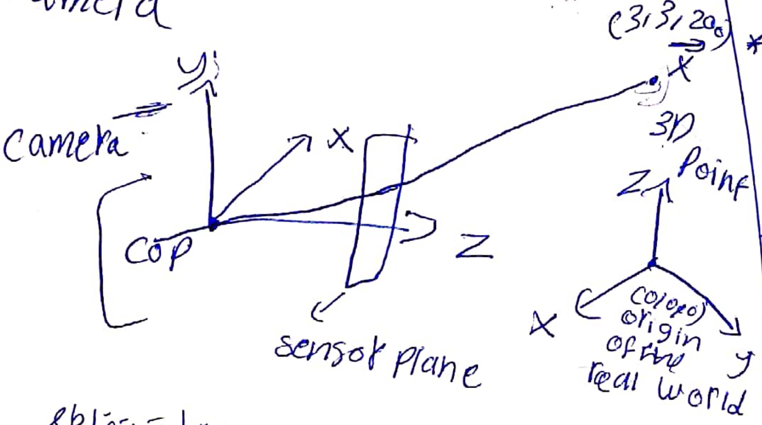
$\begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{bmatrix}$

$ax^2 + cy^2 + bxy + dx + ey + f = 0$

camera Models:-



We capture 3D scene using 3D camera



عشان اقدر اشوف النقطة لازم النقطة تقاطع ال sensor plane وتمر بال center of projection

ال coordinate لل Camera اسمها Coordinate Frame

هلأ بال real world بتكون ال 3D والصورة اللي رح اخذها من الكاميرا رح تكون 3D عشان التقاط الصورة انا بعمل 3D.3D mapping

وهاد ال maping بشمل 1-rotation 2-translation

(pure rotation) → 6 Dof

ليش هاد ال mapping ← 6 Dof لانه ال pure rotation → عبارة عن 3-Euler (yaw, pitch, roles) Angles → 3 Dof

Translation:- 3 componant
tx , ty , tz (3 Dof)

سعو tow Lines بعطيني نقطة

هدا ال Image بحولها من 3D (world frame) الى 3D (camera frame) ← وبعدها ل 2D (Sensor plane)

our capture 2D Image

* we have differant model for this entire mapping known camera mapping. → اليهو الشرح الي فوق

* ~~[illegible]~~

Forword projection:-
الانتقال من 3D ← 3D - 2D

* can we go from 2D to 3D?

* تحويل من 2D ل 3D اسم العملية Back word projection

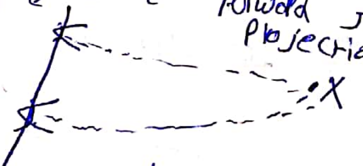
* sensor plane → هو مكان تكون الصورة

← السؤال؟ يعني من 2D ل 3D camera ل 3D world ؟

Ans: yes, under certain constrains.

Exp: having an Stereo camera

لو كان عندي نقطة X وبدي اشوفها لازم يصير Forword Projection ع العين عشان اقدر اشوفها ← الكاميرا

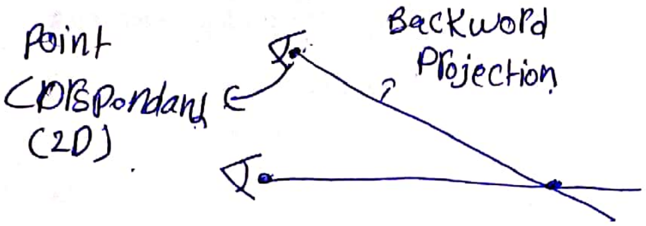


كل النقاط هدول الهم نفس ال Forword Projection

x هلأ النقطة اللي على العين او الكاميرتين

لو اخدت ال Back word projection رح يعطيني Line لكل نقطة

تقاطع ال Lines



يعني النقطتين ال (corsPondand Point) هما ال 2D

لما اعمل Backword Projection رح يعطوني two Lines

وصول ال two Lines تقاطعهم بعطيني ال Points 3D

* Kinect sensor → IR + 2D RGB Sensor
(بعمل Backword Projection)

* هدفنا ان نحصل على 3D Information من 2D

من خلال استخدام sensor مثل Kinect sensor

3D Reconstruction → ان اقدر اعمل Backword Projection

* انه اذا كان عندي scean معين هل بقدر ابني ال 3D model ؛- Yes ~~بقدر من خلال~~

او بقدر من خلال

Strure from motion using a series of 2D Images

* هلأ عشان انتقل من View لآخر بنفس ال P يعني من 2D ل 2D او من 3D ل 3D بستخدم ال Homography

* كيف بدي انتقل من 3D ل 2D ؛ -

من خلال ال camera matrix

- Intrinsic
- Extrinsic
  6 Dof

Extrinsic → بتحول مباشرة من ال world الى 2D مباشرة و الها 6 Dof

Intrinsic → عشان بتحول من 3D الى 2D هيك بتعتمد ال Dof على ال camera Model

* هلأ لو كان عندي نقطة بال world وبدي احولها لنقطة بالكاميرا بحولها من خلال matrix

$$\underset{\text{camera (3D)}}{\vec{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \overset{\text{Rotation}}{R_{3x3}} & \overset{\text{translation}}{\vec{t}_{3x1}} \\ \vec{0}_{1x3} & \phi \end{bmatrix} \vec{X}_{world}}_{X\ camera}$$

هيك بنحولها لل camera fram coordainate

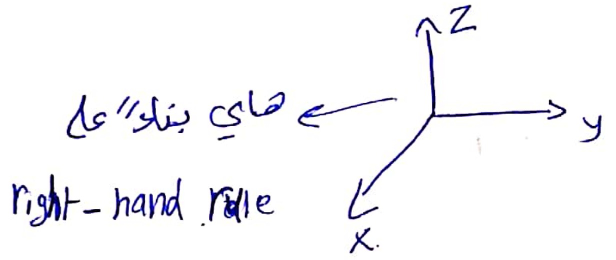
$$\underset{\substack{\text{Image}\\ \text{Plane}\\ \text{(2D)}}}{\vec{X}} = \overbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} K \end{bmatrix}}_{\substack{3x3\\ \text{Intrinsic}}}}\underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} R_{3x3} & \vec{t}_{3x} \\ \vec{0}_{1x3} & 1 \end{bmatrix}}_{3x4}\vec{X}_{world}}_{\substack{\text{extrinsic}\\ \text{matrix}}}$$

X camera

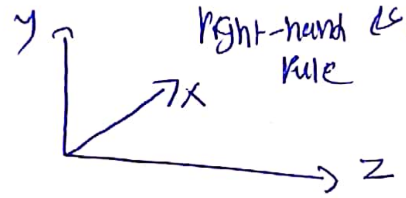
Central projection:

لازم اي اشي بدي اشوفه عل الكاميرا او عل ال sensor plane لازم يتقاطع مع ال central projection

General projective camera models:-



هاي بناءً عل right-hand rule



شو ما اغير لازم تضل عل right-hand rule

* Intrinsic Parametare:-

$$\underbrace{\vec{X}_{3\times1}}_{\text{Image plane In Int}} = \underbrace{\underbrace{\frac{K_{3\times3}}{I}}_{\text{Intrinsic}} \underbrace{\begin{bmatrix} R_{3\times1} & t_{3\times1} \\ \vec{0}_{3X} & 1 \end{bmatrix}_{3\times4}}_{\text{extrinsic}}}_{P_{3\times4}} \vec{X}_{world.}$$

$$\underbrace{\vec{X}_{3\times1}}_{\text{plane sensor}} = \underbrace{P_{3\times4}}_{\text{camera matrix}} \vec{X}_{world}$$

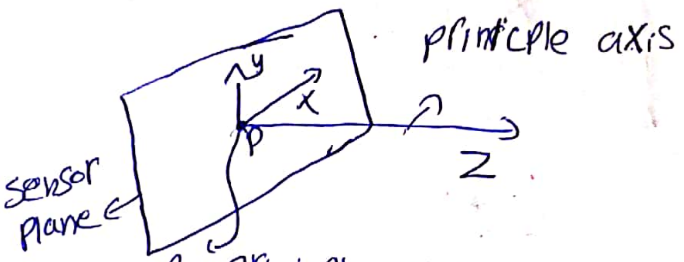
captures any central projection camera

* لما يكون عندي اي 3x4 matrix رح تعبر عن كاميرا

$P_{3\times4} \rightarrow$ بتعبر عن software camera

* تغيير الـ camera model بأثر عل ال Intransic

ال coordinates الو Image plane او ال sensor plane



P= Prinicple point

Principle point: هي نقطة تقاطع ال Z-axis ال principle plane مع ال sensor plane

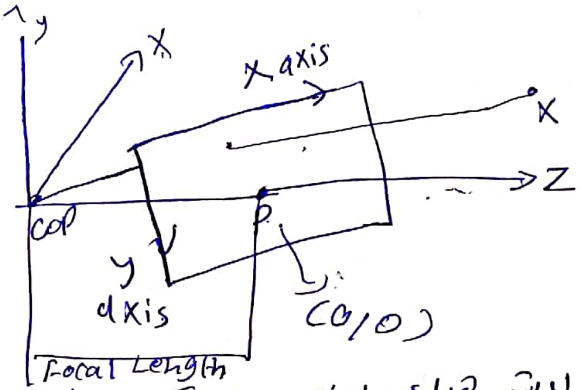
CDD sensor, CMOS → هاد مكان تكون الصورة

المسافة ما بين ال principle point و ال COP. اسمها ال focal length

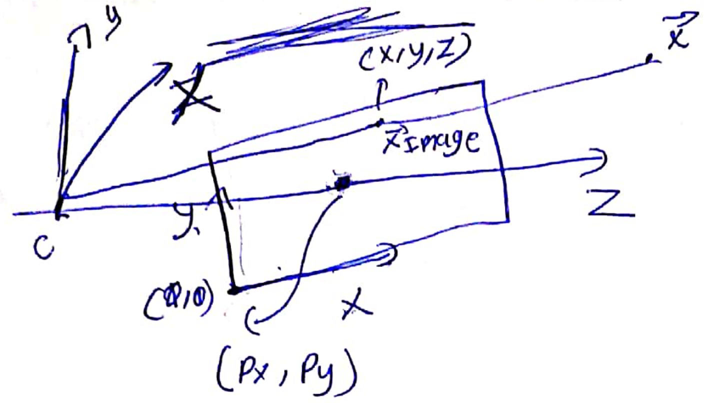
هلا في كاميرات بتقدر تغير قيمة ال focal length

Exp:- Digital single-lens reflex camera.

* need coordiant transformation

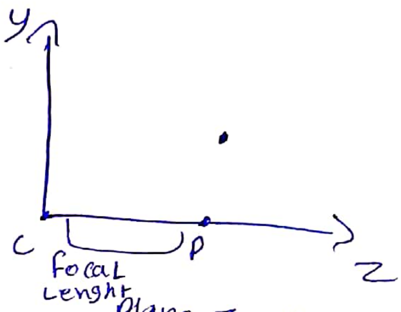


ليش هيك لانه ال X بكون داخل جوا الصورة و الصورة اصلا عبارة عن 3D. و تقاطع ال Z



يعني حسب مكان وجود ال corner بتتغير احداثيا (Px,Py)

عشان اعمل mapping co 3D ل 2D بدي اعمل تشبه مثلثات



لو اخد بين y و Z Plane

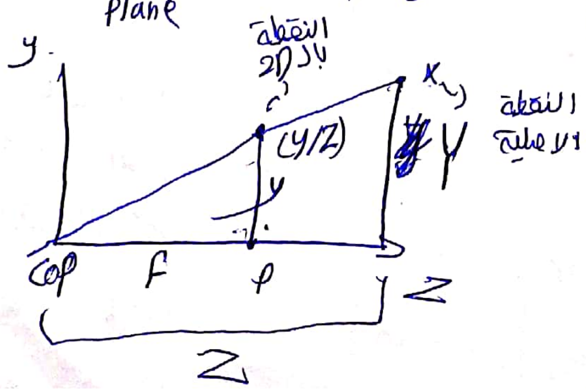
هلأ انا كل اللي بهمني النقطة اللي موجودة على ال sensor plane هلأ احداثيات هاي النقطة HC

$(X,Y,Z) \rightarrow$ Physical $\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$

Let $Z = 1$

هلأ لما تكون قيمة ال $Z = 1$ رح تصير قيمة النقطة بال 2D عبارة عن (X,Y) هلأ لازم اجيب قيمة x و y .

عشان اطلع قيمة y باخد Z,y plane



عشان اجيب ال y للنقطة اللي بدي اياها بعمل تشابه مثلثات المثلث الكبير مع المثلث الصغير

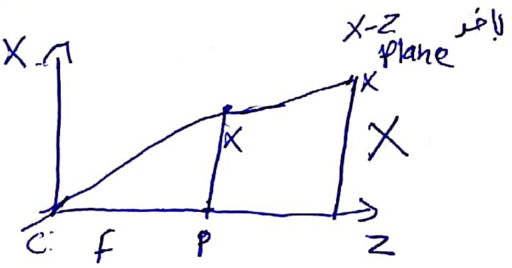
$$\frac{y}{Y} = \frac{f}{Z}$$

باخد ال y تبعت النقطة بال 2D مع ال Y اللي بال 3D ..

وباخد ال focal Length مع ال Z

$$y = \frac{fY}{z}$$

وعشان اطلع قيمة ال x بعمل نفس الاشي باخد X-Z plane



بعمل تشابه مثلثات

$$\frac{x}{X} = \frac{F}{Z}$$

$$x = X\frac{F}{Z}$$

النقطة ال 2D بتطلع بالPhysical هيك..

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{XF}{Z} \\ \frac{YF}{Z} \end{bmatrix}$$

اما بال HC

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{Xf}{Z} \\ \frac{YF}{Z} \\ 1 \end{bmatrix}$$

بقدر اضرب ب Z بطلع هيك

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} XF \\ YF \\ Z \end{bmatrix}$$

* Sensor plane In CCD camera
rectangle → عشان صيك ال digitalization على x
مو بالضرورة يكون يساوي ال digitalization على ال y

* $P_{3\times4}$ → camera matrix

$$= K_{3\times3}\left[R_{3\times3} \mid \vec{t}_{3\times1}\right]_{3\times4}$$

$$= \left[\boxed{K_{3\times3} R_{3\times3}} \mid \boxed{\vec{K}_{3\times3} \vec{t}_{3\times1}}\right]_{3\times4}$$

هدول جايين من هاي ال matrix

$$= \left[\underbrace{\vec{P}_{1_{3\times1}} \quad \vec{P}_{2_{3\times1}} \quad \vec{P}_{3_{3\times1}}} \quad \boxed{\vec{P}_{4_{3\times1}}}\right]_{3\times4}$$

$\{P_1, P_2, P_3\}$ → جايين من هاي ال $K_{3\times3}R_{3\times3}$ matrix

$\vec{P}_4$ → جاي من هاي ال $\vec{K}_{3\times3}\vec{t}_{3\times1}$ matrix

* The rows and columns of P matrix are associated with physical meaning that to be describe soon

$$\vec{t} = \cancel{R} - R\vec{C} \rightarrow \vec{C} = -R^{'}\vec{t}$$

هلأ لو ارجع لهاي $K_{3\times3}\left[R_{3\times3} \mid t_{3\times1}\right]$

$K_{3\times3}$ → 4 Dof
$R_{3\times3}$ → 3 Dof
$t_{3\times1}$ → 3 Dof

لو بدي اجيب ال Dof لل P من هاي المعادلة
بطلع 3+3+4 = 10 Dof

لو ارجع على $P_{3\times4}$ عدد العناصر فيها 12 يعني
المفروض ال Dof الها يساوي 11 تكت من
اللي قبل طلع 10 Dof

we are missing one Dof ??

one Dof → اللي نسيناه رسمه
skew factor

skew factor → assume to be zero
or pinhole model → if not zero
↓
K has 5 Dof ← finit projective camera

$$\begin{bmatrix} m_x f & \boxed{s} & p_x \\ 0 & m_y f & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

هو هون

يعني لو اجيت اصور باب و صار عندي
تقوس و قيمها s او skew factor بكون موجود

يعني $P_{3\times4}$ ← 10 Dof
اذا كان Pinehole

11 Dof
اذا كان finit projective camera

for CCD/CMOS cameras, always
s = 0

$$\vec{X}_{\text{Image plane}} = K.\,[\cancel{I}/\underset{\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}}{\vec{0}}]\ \vec{X}_{\text{came 3D}}$$

$$\vec{X}_{\text{Image Plane}} = \underset{\text{Intrinsic}}{K}\ \underbrace{[R/T]}_{\text{extrinsic}}\ \vec{X}_{\cancel{\text{came}}\ \text{world 3D}}$$

extrinsic → view dependent

Intrinsic → view indepenent

$$\vec{X}_{\text{Image plane}} = \underset{\text{camera matrix}}{P_{3x4}}\ \vec{X}_{\text{world}}$$

camera matrix → Intrinsic, extrinsic

طب لو عرفت ال P بقدر اعرف ال K, R, T , cop ح

if P Known then How to compute. $\tilde{C}$, K, R, T?

Pinhole model:- $K = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Dof of K = 1 → لانه ما عندي اشي مجهول غير f

Pinhole model → لما يكون ال coordinate لل camera بال middle.

طب لما يكون ال coordinate upper او lower ← of camera frame

رح يكون ال K

$$K = \begin{bmatrix} f & 0 & P_x \\ 0 & f & P_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

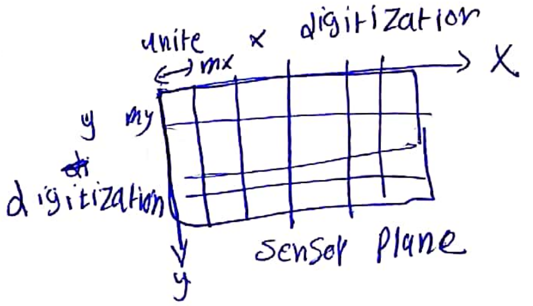
Dof K = 3 f, Px, Py

* Principal Plane:-

هو ال Plane الموازي لل Image plane

و دائما ال ~~plane~~ Principal axis بكون عامودي على ال Principal Plane عشان هيك ال Principal plane رح يكون (x-y) Plane بينما ال Z هو ال Principal axis

*Principal ray:- هو الخط الي برسمه من COP لعند ال Principal point



لو اقسم ال Sensor plane ل Pixal

كم unit رح امشي عشان احكي انه عندي one pixel

True Pixel coordinate:-

$$I = (m_x)X = m_x\left(\frac{fX}{Z_1} + P_x\right)$$

$$J = (m_y)y = m_y\left(\frac{fY}{Z_1} + P_y\right)$$

$$Z = Z_1$$

$$\vec{X}_{\text{image}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = K[I/\vec{0}]\ \vec{X}_{\text{camera}}$$

↳ بقدر اكتبها بدلالة I, J

$$\begin{bmatrix} I \\ J \\ \cancel{Z} \end{bmatrix} = K\ [I/\vec{0}]\ \vec{X}_{\text{camera}}$$

$$K = \begin{bmatrix} m_x f & 0 & P_x \\ 0 & m_y f & P_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [I/\vec{0}]\ \vec{X}_{\text{camera}}$$

$\alpha x = m_x f$

$\alpha y = m_y f$

K has 4 Dof

$\boxed{\text{صار اتكلم عن CDD camera}}$

هلأ كل التحويل اللي عملته بحول ما بين نقطة موجود بال 3D ← بال camera frame مش في ال world لـ 2D موجودة بال sensor plane

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

HC of Point In sensor Plane

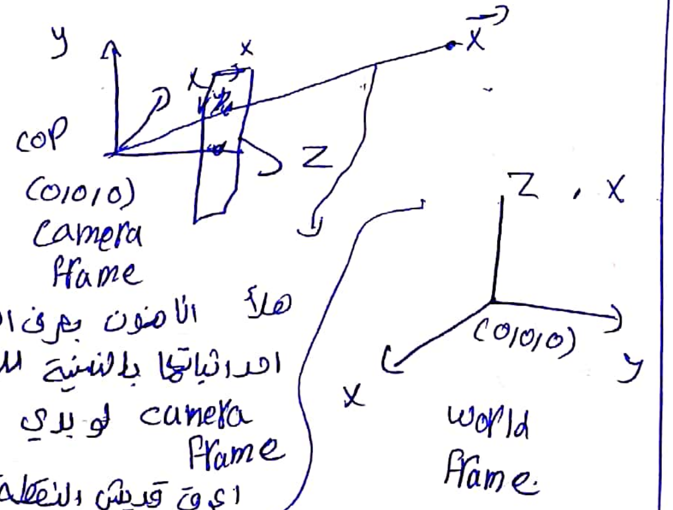
Intrinsic when the center ~~cor~~ coordaint at flam middel of at the Prinsiple point

HC of 3D point In camera frame

$$K = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Intrinsic}$$

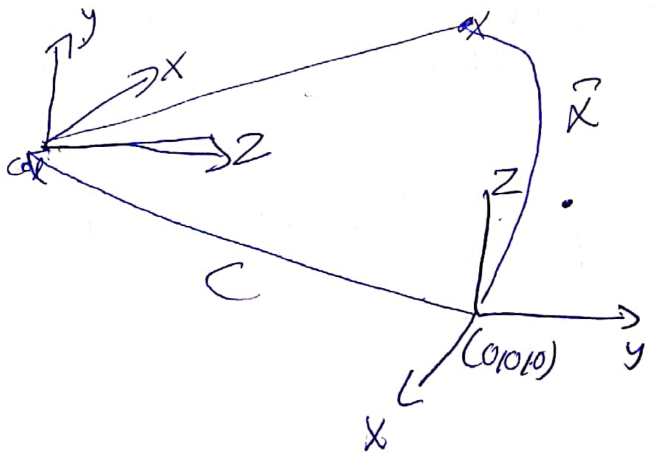
لما يكون ال coordinate fram at middel بتكون K :

$$K = \begin{bmatrix} f & 0 & P_x \\ 0 & f & P_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



هلأ الأصول بعرف النقطة احداثياتها بالنسبة لل camera frame لو بدي اعرف تحديد النقطة بال 2D بستغل الشغل العادي اللي فوق

اما لو انا اصلا ما بعرف احداثيات النقطة، بالنسبة لل camera frame بعرفها فقط بالنسبة لل physical world كيف رح اعرف تحديد احداثياتها بالنسبة لل 2D ؟ -



$[\tilde{X} - \tilde{C}]$

$\tilde{X} \rightarrow$ physical

$\tilde{C} \rightarrow$ physical

بمسك ال origin بال 3D world وبحركها عشان يعمل match مع ال camera

$$\tilde{X}_{cam} = \underset{\downarrow \text{Rotation}}{R}\,[\tilde{X}_{world} - \tilde{C}] = R\tilde{X} - \underbrace{R\tilde{C}}$$

هاي هي ال Translation

$T = -R\tilde{C}$

can we write In HC ؟ -

yes,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{X}_{cam} \\ 1 \end{bmatrix} = [R_{3\times3} / T_{3\times1}] \begin{bmatrix} \tilde{X}_{world} \\ 1 \end{bmatrix}}$$

بهاي الطريقة بقدر احول النقطة من world لل cam.

و عشان احول من ال cam لل 2D بعمل هيك

$$\vec{X}_{Image} = K[I / 0]\vec{X}_{cam}$$

$$\vec{X}_{Image} = K\,[R/T]\,X_{world}.$$

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} Xf \\ Yf \\ Z_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Intrinsic Prameter}} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z_1 \end{bmatrix}}_{\text{بنقدر نكتبها هيك}}$$

هاي النقطة لا ل 3D

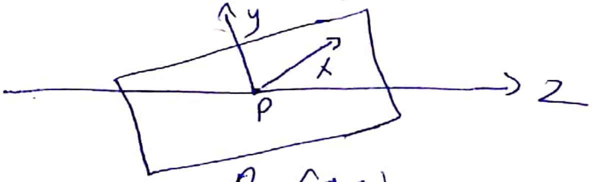
$$\begin{bmatrix} 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & 1 \end{bmatrix}$$ لما اضربها مع $$\begin{bmatrix} X' \\ Y \\ Z_1 \end{bmatrix}$$

بتطلعلي النقطة ال 2D $\vec{x}$

هاي النقطة Physical 3D بال world ~~camera frame~~

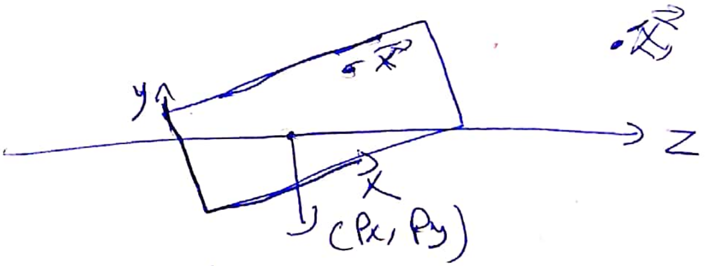
هون ال center هاي In middel

كل الي طلعناه قبل على اساس انه الcoordainate ال sensor plane هيك



P= (0,0)

لو احرك ال coordinate شو رح يصير



$$y = \frac{Yf}{Z_1} + P_y \quad , \quad x = \frac{X'F}{Z_1} + P_x$$

$$\text{Intrinsic prameter} = \begin{bmatrix} F & 0 & P_x \\ 0 & F & P_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\text{2D Point}}{x} = \begin{bmatrix} f & 0 & P_x \\ 0 & f & P_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\text{3D Point}}{\vec{X}}$$

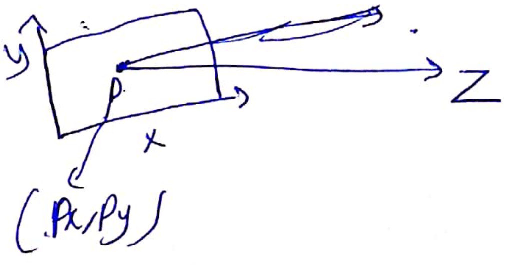
$$\begin{bmatrix} f & 0 & P_x \\ 0 & f & P_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z \end{bmatrix}}_{\text{Physical ال}}$$

هل بقدر احول ال Physical ل H.C.

اه بقدر هيك بصير

$$\underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix} F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}^{\text{camera matrix}} \begin{bmatrix} X' \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{هاي لما كان ال center ال coordinate In midel}} = \underbrace{K\,[I_{3\times3}\ \vec{0}_{3\times1}]}_{\substack{3\times3 \\ \text{camera matrix}}} \underset{\text{3D Point known In camera frame}}{X_{3\times1}}$$

Incase the coordinate frame of the Image of senser plane is placed to the lower left corner of the plane then the coordinate of the principle point will be (Px, Py)



$$\begin{bmatrix} f & 0 & P_x \\ 0 & f & P_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

P → general Projective camera

any general 3x4 matrix

بحيث يكون الجزء العلوي عبارة عن 3x3 non-singular matrix

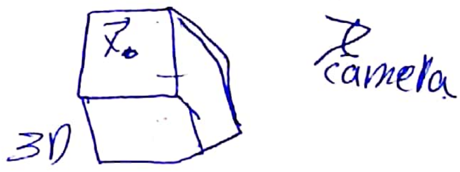
$$P = [\underbrace{P_1 P_2 P_3}_{\text{non-singular matrix}} | P_4]$$

general projective camera :-

any 3x4 matrix where upper 3x3 submatrix is non singular

$$\left[\begin{array}{ccc|c} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_5 & p_6 & p_7 & p_8 \\ p_9 & p_{10} & p_{11} & p_{12} \end{array}\right]_{3x4}$$

هاي لازم تكون non-singular



* هلأ لو كان عندي نقطة بال 3D هل بقدر هاي النقطة من خلال الكاميرا اشوفها باكثر من view :- اه بقدر من خلال ال matrix P تغير ال matrix P رح يغير ال view لهاي النقطة

هلأ اذا كان معي P بقدر اطلع C, K, R, T ال cop.

م

بال P مفهات يكون ال Dof $\left.\begin{matrix}10\\11\end{matrix}\right]$

10 → اذا كان ال skew factor = 0

11 → اذا كان ال skew factor = 1

لما تكون ال Dof لل P = 11 تكون اسمه finite projective camera

$$\begin{bmatrix} mxf & S & px \\ 0 & myf & py \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$S=0 \rightarrow Dof = 10$, $S \neq 0 \rightarrow Dof = 11$

يعني لو كنت بصور الشي مستقيم وطلع معي بالصورة هو مستقيم وفيه تقوس ماتكون Finite Projective

$\delta \neq 0$ Dof of K = 5

$S = 0$ Dof of K = 4

لما تكون ال S=0 بكون عندي Pine hole model

بالRotation ال model الي بنستخدمه XYZ

$R_x(\gamma) R_y(\beta) R_z(\alpha)$

بطبق $R_z(\alpha)$ بعدها $R_y(\beta)$ بعدها $R_x(\gamma)$

$$P = \underbrace{K_{3x3}}_{} [R_{3x3} | t_{3x1}]_{3x4}$$

K → non-singular matrix

$$P = [K_{3x3} R_{3x3} | K_{3x3} t_{3x1}]_{3x4}$$

R_{3x3} → is non-singular matrix

$K_{3x3} R_{3x3}$ → ناتج ضرب K مع R تكون non-singular

general projective camera :-
make it even more $\boxed{\text{generalization}}$

Software camera :-

Any 3x4 matrix which has a rank of 3, Left 3x3 sub matrix ~~8~~ is not necessary to be non singular

∴ الفرق بين ال general (P) و ال Software camera :-

انه ال Software camera more generalization - مو بالضرورة تكون ال Left submatrix non-Singular

~~So~~ ~~11~~

هلا لو اعطاني 3x4 matrix كيف اعرف اذا هي Software camera او general projective camera :-

general camera → left submatrix لازم تكون non-Singular

Software camera → لازم تكون ال matrix ال rank الها يساوي (3)

$P = [\underbrace{P_1\ P_2\ P_3}\ P_4]$

KR = $P_1 P_2 P_3$ لل general matrix اذا كانت

From these column we know M

Now, How to derive K and R from m? need to compute QR decomposition from Linear algbra

$M = RK = P_1 P_2 P_3$

$\ddot{M}$ is 3x3 sequre matrix

اي sequre matrix بقدر اكتبها هيك :-

$A = \underset{\downarrow}{Q}R$, $A = RQ$

اذا كان QR لازم لازم Q تكون ~~ال orth~~ orthognal matrix

* هلاء ال orthogonal matrix عن شو بتعبر؟ - Rotation

و ال R ال 2 تحمك upper triangle matrix يعني ال Lower tringle بتكون اصفار

مثال عل ال K :- upper tringle

$$K = \begin{bmatrix} f & s & p_x \\ 0 & f & p_y \\ 0 & 0 & \text{[illegible]} \end{bmatrix}$$

$\boxed{A = RQ}$ بس انه الي بدي اشتغل عليها مش A=QR

$A = \underset{\substack{\swarrow \\ \text{upper triangle matrix}}}{R}\ \underset{\substack{\downarrow \\ \text{orthogonal}}}{Q}$

فبو الاشي الي بقدر احصل منه خلالها RQ matrix :- من خلال Linear algbera :-

1- Householder transformation method

2- gram-smit otho-normalization method

R → هاي مختلفة عن ال Rotation

لازم اكتب M . بهاي الطريقة

$$M = \begin{bmatrix}\text{upper} \\ \text{matrix}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\text{orthognal} \\ \text{matrix}\end{bmatrix}$$

K $\quad$ R ↓ we can provide a guas for this matrix

$R \rightarrow$ Rotation هاي عبارة عن matrix

$R \rightarrow$

كيف احسبها؟ -

assume certain value for the eular ~~matrix~~ angele (γ, β, α)

compute $R = R_x * R_y * R_z$

Pitch Roll Yaw

هلأ احنا معنا M و معنا R فلك احسب الـK كيف

$$M = KR \rightarrow K = MR^{-1}$$

$K t = \vec{P_4}$ و t بنمثله بـ Translation طيب و كمان الـ

$t = -R\vec{C} \rightarrow$ ~~$\tilde{C} = -R^{-1}t$~~ $t = K^{-1}\vec{P_4}$

$\tilde{C} = -R^{-1}t$

هلأ كل الـ R, t, C, K طالعهم لما كان عندي software camera كيف لما يصير عندي general camera بحسبهم؟ -

* اذا general camera هي software camera لا

general camra → عبارة عن co subcase من الـ Software camera

Software camera : $P_{3\times4}$

↳ general projective camera

$$P_{3\times4} = [\underset{3\times1}{\vec{P_1}} \; \underset{3\times1}{\vec{P_2}} \; \underset{3\times1}{\vec{P_3}} \; \underset{3\times1}{\vec{P_4}}]_{3\times4} = [M \; \vec{P_4}]_{3\times4}$$

Recall: $\vec{X}_{3\times1} = P_{3\times3}\vec{X}_{world}$

Image Point In HC $\qquad$ world Point In HC

$$\vec{x}_{3\times1} = K_{3\times3}[R_{3\times3} \mid \vec{t}_{3\times1}]\vec{X}$$

$M = KR$, $\vec{t} = R\vec{P_4}$

if we know P, then we know M and t

From $M \rightarrow$ we can perform RQ decomposition, $R \rightarrow$ is uper triangle matrix

$Q \rightarrow$ orthogonal

provide an estimate gases for (α, β, γ) Rotation matrix

then find $K = MR^{-1}$

then find $t = K^{-1}\vec{P_4}$

then find COP $\rightarrow \hat{C} = -R^{-1}t$

$\tilde{C} = M^{-1}\vec{P_4}$

Now, what if M was a singular matrix؟ but P has a Rank $= 3$?

يعني هلا كيف بقدر احسب software camera

K, t, R, C .

[redacted]

$P_{3x4} \vec{C} = 0$
↓
Null space
↓
will represent the HC of the cop

هلأ لو عندي camera و بدي اعرف وين موجودة بطلع ال null space الها بعمله ال null space = $\vec{C}$

$\vec{C} \rightarrow$ location of camera

* more intersting:- $M\vec{d} = \vec{0}$
↓
null space

* If the Last row of p is [0 0 0 1] then

$$\vec{C}_{4x1} = \begin{bmatrix} \vec{d} \\ 0 \end{bmatrix}$$

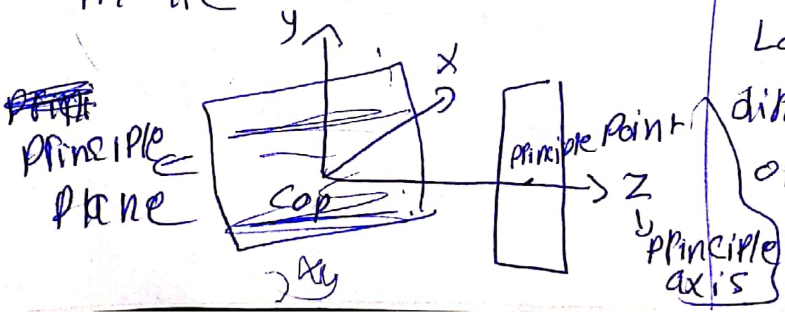
Thrid row of P_{3x4}
this is a Principle Plane

Recall $\pi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Physical meaning associated with the columns and rows of P_{3x4}:

Note:- the rows of P represent Homogenes equations of special planes.

Row3:- Principle planes equation in HC



Principle Plane:-

هو ال Plane اللي بتكون prallel مع ال sensor plane و بمتد من ∞- ل ∞

∴ لما يكون عندي اخر row في P = [0001] هاد بمثل معادلة ال Principle Plane و ال cop

و بتكون = $\vec{C} = \begin{bmatrix} \vec{d} \\ 0 \end{bmatrix}$ its ideal point

This mean the camera is located at ∞,

but more interastingly it has a direction: along the z-direction

يعني لانه ال principle plane هو عبارة عن xy بالمثال السابق و عشان اعرف ال direction بتكون العامودي على ال Principle Plane

orthogonal camera:-

صح ال camera اللي بتكون ال P الها Rank =3

[redacted]

Affine camera:-

Last row of P= [0 0 0 1] helps us define a special Softwere camera that is called Affine camera.

Located at ∞ and it has a direction.

one subtype of this camera is called orthographic ~~orthogonal~~ camera

$$P = \left[\begin{array}{ccc|c} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_5 & p_6 & p_7 & p_8 \\ q & \sigma & \alpha & \phi \end{array}\right]_{3\times4}$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{M}$ M.

M → is singular because last row is zero

* لما تكون P اخر row فيها يساوي [0 0 0 1] بتكون Affine camera.

* اذا كان لي software camera و ال Rank لل P
= 3 و ال camera is located at ∞

$c = \text{Null space of } (P) = \begin{bmatrix} \vec{d} \\ 0 \end{bmatrix}$

where $\vec{d}$ = null space of M

and has a direction.

كيف اعرف ال direction لل camera ؟ -

مو ال axis عمودي ع ال Principle plane

C is ideal point

Physical Intintion associted with the Indiviual column of P :-

$$\underset{\substack{3\times1 \\ \text{Image Point}}}{\vec{x}} = \left[\vec{P}_1 \; \vec{P}_2 \; \vec{P}_3 \; \vec{P}_4\right]_{3\times4} \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}_{4\times1}}_{y}$$

هاي النقطة الي بتكون بال world هي الي بتخليني
اعرف شو معنى ال column عشان اعرف شو معنى اول
column بخلي النقطة تكون هيك $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{4\times1}$ وهاي عبارة
عن نقطة موجودة ع X-axis

↙ HC of an ideal Point along the x-direction

---

the $\vec{x}_{3\times1}$ will be its associated image point a Vanishing point In the Image plane

يعني ال ideal Point ← In real world لما تلتقطها
الصورة بتصير اسمه Vanshing point . $\vec{x}_{3\times1} = \vec{P}_1$

By the same token. if $\vec{X}_{4\times1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$:

✓ world point.

اخترت هاي النقطة عشان اعرف P2 شو بتعطيك . $\vec{P}_2$

$X_{4\times1}$ ⇒ ideal point along y direction

$\vec{x}_{3\times1}$ → Vanshing Point of Image

$\vec{X}_{3\times1} = \vec{P}_2$

---

if $\vec{X}_{4\times1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ → ideal point along z-direction

بدي اطلع P3

$\vec{X}_{3\times1}$ ⇒ Vanshing point In Image.

$\vec{X}_{3\times1} = \vec{P}_3$.

يعني P3 عبارة عن Vanshing point.

وعشان اطلع P4 رح اضرب $X_{4\times1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$X_{4\times1}$ → represent HC of the ~~of~~ world origin ~~located of camera~~ ~~origin~~

then $\vec{X}_{3\times1} = \vec{P}_4$

$X_{3\times1}$ → represent HC of the Image of world origin

طيب هلأ لازم اعرف كل ال row شو بتمثل ال PJ

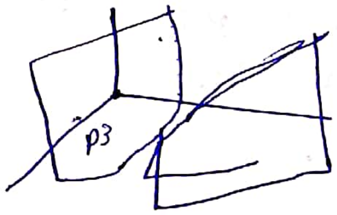
$$P_{3\times4} = \begin{bmatrix} P^{1T}_{1\times4} \\ P^{2T}_{1\times4} \\ P^{3T}_{1\times4} \end{bmatrix}_{3\times4}$$

Row of P

$P_1, P_2, P_3 \rightarrow$ Represent special Plane given In HC

$$\underset{\text{Image Point}}{\vec{x}} = \begin{bmatrix} \vec{P}_1^T \\ \vec{P}_2^T \\ \vec{P}_3^T \end{bmatrix} \underset{\text{world Point}}{\vec{X}_{4\times1}}$$

لو اعتبرنا انه P_3 هو ال Principel Plane اللي ورا الكاميرا



$$\underset{\text{Image Point}}{\vec{x}} = \begin{bmatrix} \vec{P}_1^T \vec{X} \\ \vec{P}_2^T \vec{X} \\ \vec{P}_3^T \vec{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

النقاط اللي فرضيتهم
دخلت النقطة عليهم بس/ كلهم ورا الكاميرا
P_3

هلأ النقاط اللي بتكون ورا الكاميرا ما بتكون مبينة يعني بتكون ال Z 0s

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{P}_1^T \vec{X} \\ \vec{P}_2^T \vec{X} \\ \vec{P}_3^T \vec{X} \end{bmatrix}$$

$\vec{P}_3^T \vec{X} = 0.$

$\vec{P}_3^T \vec{X} = 0 \rightarrow$ هاي عبارة عن معادلة

$$\underset{1\times4}{\vec{P}_3^T} \underset{4\times1}{\vec{X}} = \vec{0} \rightarrow$$ نقطة على Plane

world point

then P_3 must be a plane equation In other world. It is the Principle Plane In HC.

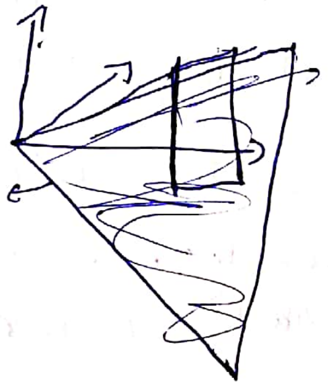
هون ال Principle Plane مستحيل يكون الا خلف الكاميرا و لازم كل عناصره تكون صفر

8 Row → عبارة عن Principle Plane

خلينا نشوف ال row الاول هلأ :-

whats about Row1 and Row2 :-

Row1 :- $\vec{P}_1^T \vec{X} \rightarrow$ represent



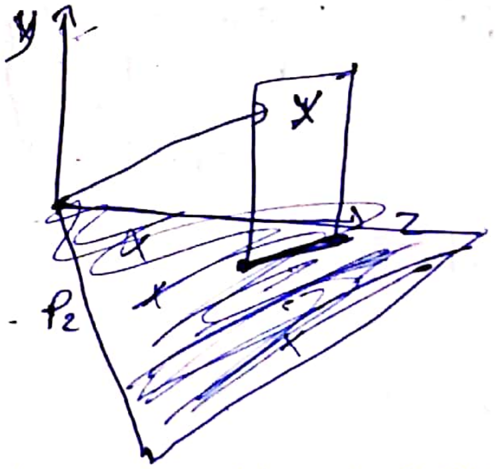
كل هدول النقاط اللي موجودة با Plane الكبير رح تكون موجودة على ال coVertical Line

ال Principle Plane

Row1 :- HC of this plane.

Row1 :- represents the projection of all points $\vec{x}$ In plane P^{1T} defined by the camera center and Image plane principle axis In vertical orientation In y axis

Row2:- نفس ال Row1 بالضبط بس ال projection للنقاط ح تكون ع ال X-axis



يعني صور النقاط x اللي بال 3D world كلهم الهم projection تكون ع ال xaxis وهدول النقاط اساساً موجودين ع ال plane (P2).

* اذا بدي اعرف كل النقاط اللي موجودة ع ال Horizental axis اللي موجودة ع ال Sensor plane باخذ row2

* بما بدي اعرف كل النقاط اللي موجودة بال world اللي الهم Projection ع vertical x axis ع ال Sensor plane باخذ row1

* لو بدي اعرف كل النقاط اللي موجودة ع ال Principle plane باخذ ال row3

~~For~~ forword projection:-

$$\vec{x}_{1x3} = P_{3x4}\vec{x}_{4x4} = [M|\vec{P_4}]\vec{x}_{4x4}$$

$$= [\vec{P_1}\ \vec{P_2}\ \vec{P_3}\ \vec{P_4}]\vec{x}_{1x4}$$

Back-Projection:-

Recall : forword-projection:-

شو فائدة ال Backword-projection :-

very useful in 3D-Reconstraction

forword-projection:-

$$\vec{x}_{3x1} = P_{3x4}\ \vec{X}\ 3D\ _{4x1}$$

Image Point — camera matrix. — world Point

Backword-projection will require finding the Inverse of P.

بالنسبة النا ال Backword projection رح تكون ال Image point وال P معروفين اللي بدي اعرفه هو 3Dworld Point.

$$\vec{X}_{4x} = Inverse(P)\ \vec{x}_{3x1}$$

3D world Point — Image point

* How Inverse(P) can be computed given the fact it has a rank of 3.

$^{Inv}P_{(4x3)}$ → is singular because (4x3) and has rank of 3. because this Inverse can't be computed.

we can compute what is called Pseudo Inverse

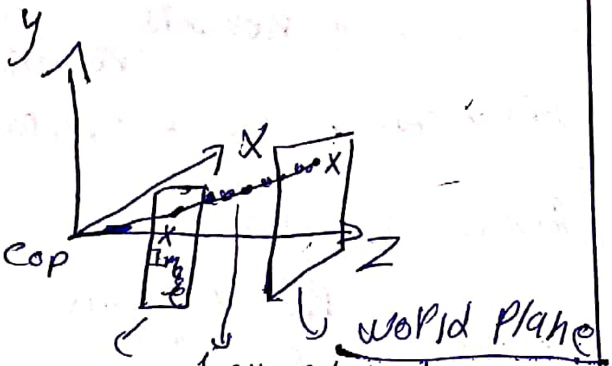
$$P^{+} = P^{T}(\underset{3x4}{P}\underset{4x3}{P^{T}})^{-1}$$

ليش PP^T قدرنا نحسب ال Invers الها؟

اصلاً ال P حجمها 3x4 و P^T حجمها 4x3 لما نضربهم ناتج الضرب تكون 3x3 وهاي عبارة عن square matrix ال رح تكون non-singular

$P^* \rightarrow$ is not unique

ليش P^* مش unique ؟



all ~~point~~ are possible 3D point corresponding to X world

عشان اشوف النقطة X لازم تتقاطع مع ال sensor plane و تقطع cop

لو ا بالBackworld فانا من الImage X بدي اطلع X world

فرع اعمل projection هاد رح يعطيني كثير نقاط

* the backworld projection of an 2D Image point is a 3D Line.

المعنى من الكلام انه اذا كان عندي نقطة بالImage (2D) بدي اعمل projection عشان اطلع قيمة ال 3D point رح يطلع معي مجموعة من النقاط رح يكونوا (3D Line) وهذا يعني انه ال projection لل Point ← is not unique.

Affine camera :-

orthographic camera

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

determine the direction of camera → كيف ؟

$$P\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix}$$

direction on Z.

Affine camera :-

هي هي كاميرا ال Row الاخير بتكون فيه [0 0 0 1] و حالة خاصة منها هي ال orthographic camera بتكون قيمة ال δ_1 و δ_2 = 1

$$\begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اما اذا كان δ_1 و δ_2 مو 1 بكون اسم هاي ال camera ← scaled orthographic camera

If $\delta_1 , \delta_2 = 1$ orthographic camera Located at ∞ in the Z-direction.

if δ_1 , δ_2 are not ones :-

1- $(\delta_1 = \delta_2)$ ↓ scaled orthographic camera

2- $(\delta_1 \neq \delta_2)$ ↓ perspective projection camera.

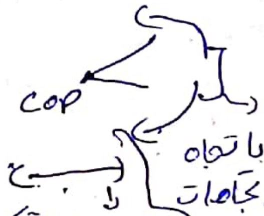
$\vec{x}_{3\times1} = P_{3\times4} \, \vec{X}_{4\times1}$ → Forward اسمو Projection.

$\vec{X}_{4\times1} = \underbrace{Inv(P_{3\times4})}_{P^* \to \text{Psoude Inverse}} \vec{x}_{3\times1}$ ← Backword ال اما

(Image stitching) Mosaicing of construction

Panoramic view of set of overlapped ~~Images~~: Images:-

Assume we have a camera



اذا بدي اتحكم باتجاه الكاميرا من هاي الاتجاهات بعمل Rotation

اذا بدي اتحكم بهاد الاتجاه بعمل 3D Translation

$\vec{x}_{3\times1} = P_{3\times4} \, \vec{X}_{4\times1}$

$P_{3\times4} \to K[R|t]$ → Assume on translation

$P_{3\times4} = K[R|\vec{0}]$ بتصير ال P هيك

Assume the focal length can change

* for any camera we can change 3 thing:- 1- Rotation 2- Translation 3- focal length

* عنا رح نغير بس شغلتين:- 1- Rotation 2- focal length

لانه ثبتنا ال Translation

* consequently changing the paremeters will result in a new camera matrix

P → with possible change → P'

$\underbrace{P}_{K \;\; R}$ → one view

P' → another view

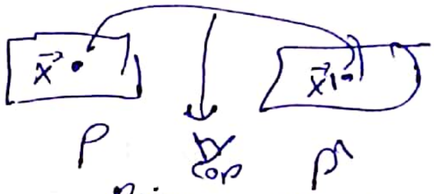
اذا بغير ال focal length رح اغير ال K بس

لانه ال K =
$$\begin{bmatrix} F & 0 & P_x \\ 0 & F & P_4 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

~~$P' = (K'R')(KR)^{-1}P$~~

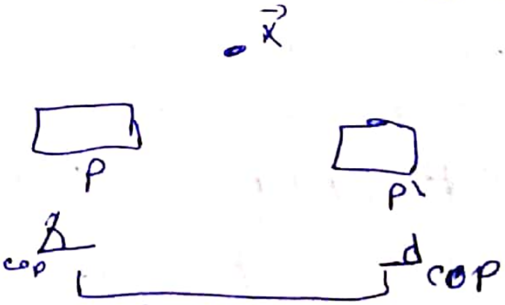
$$P' = (K'R')(KR)^{-1}P$$

* P and P' must be an ~~other~~ overlapped view.



Point corrospondance

* لو كان عندي $\vec{X}$ → point الكاميرا تعتي كيف بتشوفها



Both have same cop

* يعني انا عندي كاميرتين بدهم يشوفوا الاشي في اختلاف بالكاميرا من خلال ال Rotation

* عشان اعرف النقطة x لازم استخدم هاي ال matrix ←

$\vec{x}_{3\times1} = P \vec{X}_{4\times1}$

$\vec{x}' = P' \vec{X}_{4\times1}$

Optical zoom → scaling بالتوسع

$$P = \begin{bmatrix} f & 0 & 400 \\ 0 & f & 300 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot [I \mid \vec{0}] = [\vec{P}_1\ \vec{P}_2\ \vec{P}_3\ \vec{P}_4]$$

بالنسبة لل Homography ال (x, y) ⇐

$$H = [\vec{P}_1\ \vec{P}_2\ \vec{P}_4]$$

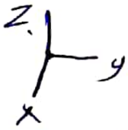
بالنسبة ل (Y, Z) =

$$H = [\vec{P}_2\ \vec{P}_3\ \vec{P}_4]$$

بالنسبة لل (x, Z) ⇐

$$H = [\vec{P}_1\ \vec{P}_3\ \vec{P}_4]$$

* هلأ بالصورة الي عندي اذا بدي ارجع ال x لل Image
x_{world} رح يصير عندي مشكلة لانه ال ~~ideal Poi~~ Vanishing Point
الي ناتجة من تقاطع ال Parallel Line رح
تتحول ل ideal point . عشان هيك الصورة
الي بدي اجيب ال view فيها من plane معين
بعملها crope عشان اتخلص من ال ideal Point
فباخذ اما الجزء العلوي او السفلي .

* يعني بالصورة الي موجودة عندي نفترض انه بدي
الجزء الي عل الشمال باخذ الصورة و بضربها
بال Homography ⇐ $H = [P_1 P_3 P_4]$ ليش لانه بدي
اياه على X-Z plane 

طبعاً قبل ما اطبق H
على الصورة لازم اقص الصورة النص بحيث
ابعد عن ال Vanshing Point .

الفائدة من هاد الاشي بال Autonmous car .
عشان بتخلي السيارة تضل بمسارها من خلال
انه لما تاخذ Image من الكاميرا ، بتقدر تعمل
crop للصورة و اتجنب ال Vanshing Point و هاد
بخلي ال Parellel Line يضلوا Parallel

* عشان احدد ال Border بعمل edge dedection

كيف اخلي ال car بالمنتصف
اول الشي لازم نوجد ال Border of the Lane من خلال
انه اعمل edge dedection و لما اوجد ال Border بجيب
معادلات ال Line الي بمر بال Border of the Lane و بعدها
و بعدها بعمل Cross Product لل Parallel Line هيك رح
يطلع عندي ideal Point .

Orignal Image → Crop of Image → Image of the ground of Floar plane → edge dedection to find Border of the lane → ~~edg~~ find the Line equation → Cross Product → find ideal Point → focus on ideal Point.

كل الي حكينا ه انه لما اعمل ال Forward Projection رح احول
ال Plane ل Homography و هاي ال Homography بتعبرنا
انه ناخذ ال floor او ground او ال ceiling او ال side wall
يعني x z او xy او zy من الصورة

ملاحظة مهمة جداً :- ليش ما اعمل Backward Projection
لل 2D Image Point رح تتحول ل 3D Line
لانه عشان اعمل Backward Projection لل Point بنا محتاج
انه ~~اعمل~~ استخدم Psoude Inverse و Psoude Invers
is not unique

$$P' = (K'R')(KR)^{-1}P \rightarrow ①$$

$$\underbrace{\vec{x} = P\vec{X}}_{②} \quad \text{and} \quad \underbrace{\vec{x}' = P'\vec{X}}_{③}$$

* Now lets substute ① in ③

$$\vec{x}' = (K'R')(KR)^{-1}\underbrace{P\vec{X}_{4x1}}$$

Note that this point is $\vec{x}$

$$\underset{3x1}{\vec{x}'} = \underbrace{(K'R')(KR)^{-1}}_{\text{Homography}}\vec{x}$$

H 3x3

∴ العلاقة بين Image1 و Image2 هي ال

$H = (K'R')(KR)^{-1}$ ← Homography

* لازم يكون في overlapp بين الصورتين عشان نقدر نعمل panoramic view

$$H = (K'R')(KR)^{-1}$$

This Homography can be Relaxed and simplified if we have just changes in Rotation or Intrinsic Parmeteres (Focal length)

how make Ralexed of Homography.

Case①:- Changes only in the focal length.

كيف بقدر اغير ال focal length لـ camera في

من خلال العدسة لما اصغر ال focal length بعمل Zoom In وهاد بعطي hight Rezeluation

* we have a high reseluation Image for every smaller portion of the original "First larger Image.

In this case $R = R'$

$$x' = (K'R')(KR)^{-1}\vec{x}$$

$$x' = K'R'R^{-1}K^{-1}\vec{x}$$

$$x' = \underbrace{K'K^{-1}}_{\text{Homography}}\vec{x}$$

ال Homography الي بستخدمها لما يكون تغير فقط بال focal length هي $H = K'K^{-1}$

$$K = \begin{bmatrix} F & 0 & P_x \\ 0 & F & P_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , K' = \begin{bmatrix} F' & 0 & P_x \\ 0 & F' & P_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

P_x, P_y → بتكون zero اذا كان ال coordinate frame لل Image plane ال Principle Point

* case 2 :- just change the orentation of the camera.

In this case $K = K'$.

~~$H = KK^{-1}$~~ $H = K R' R^{-1} K^{-1}$

Pure Rotation

let's assume that the first view image the camera frame coinsides with the world frame. $R = I_{3x3} \Rightarrow R' = I_{3x3}$

$$H = K R' K^{-1}$$

upper matrix / orthogonal or orthonormal

→ this form is known as Conjugate Rotation which tells us that the eigenvalues of R1 and H are the same.

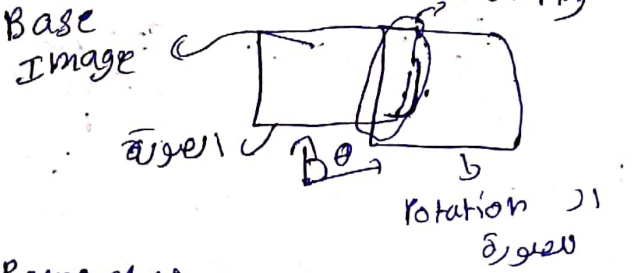
· Corrospondencies.

Conigate Rotation :-

let $R' = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$

From θ we can find R

ان اما لو عنا صورة و عملنا Rotation 2) يكون
الصورة و ال Rotation للصورة في overlapping
بيقوم overlapping



Remember K is fixed, and R' changes relative to the Base Image because it is view dependant

* But the case we have is the opposit we can estimate or have an information about R' and we need estimate θ

* find the eignvalue of the Rotation matrix → eigendecompostion → SVD

$R'\vec{V} = \lambda\vec{V} \rightarrow (R' - \lambda I)\vec{V} = 0$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\lambda_2 + \lambda_3}{2}\right)$$

But $H = K R' K^{-1}$ has the same eigen value

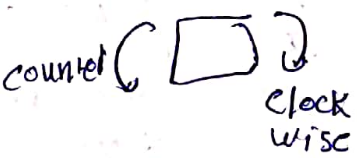
* يعني ~~بس~~ بس بيطبق two Image بيطلع ال Homography كيف بيطلع ال Homography من خلال ال ~~eigenvalue~~ نختر 4 قيم بكل صورة و بيطلع

* ال eigenvalue لا زم بكون det(H) = 1 عشان ما يكون في sealing

كيف اخلي ال det(H) تساوي صفر
دول اللي بحسب ال det(H) بعدين بخلي
$H = H/\det(H)$ ← بعدين بعمل SVD of
eglendecompostion
و بعدها $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\lambda_2+\lambda_3}{2}\right)$

* كيف عمل projection.

الصورة اللي بالنص اسمها Contter Clockwise



كماك كا الصورة،

corrospondencies.

1- must know the minimum of point corrospondencies.

2- the camera matrix parmeters P_{3x4} or as a vector $\vec{P}_{12x1} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9 \\ p_{10} \\ p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix}$ will be the null space and such as big matrix.

Therefor our starting point is the following equation.

$$\underset{3x1}{\vec{x}_i} \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{Cross} \\ \text{Product}}}{\times} P_{3x4} \underset{4x1}{\vec{X}_i} = 0$$

اهمية ال camera calibration بتطبيق معلومات
كيف نعمل projection من ال 3D world لل Image
اهميتها بالسيارات ذاتية القيادة.

Two approaches :-

1- Painless Approach :-

باستخدام ال ~~absult~~
absiult conic.

2- Painfull Approach :-

من مثال ال corrospnding point.

let $\underset{\text{2D image point}}{\vec{x}_i} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ w_i \end{bmatrix}$

$$P = \begin{bmatrix} p^{1T} \\ p^{2T} \\ p^{3T} \end{bmatrix}$$

لو بدي احسب ال det لل $\vec{x}_i \times P_{3x4} \vec{X}_{1\,4x1}$

$$\det \begin{bmatrix} i & j & k \\ x_i & y_i & w_i \\ P_1^T \vec{X}_i & P_2^T \vec{X}_1 & P_3^T \vec{X}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

هاد هي نقطة كاملة
X_{4x1}

رح يطلع معنا 3 equation

~~$(y_i P_3^T \vec{X}_i - z_i P_2^T \vec{X}_i)\, i - (x_i P_3^T \vec{X}_i - P_1^T \vec{X}_i)\, j$~~
~~$+ (x_i P_2^T \vec{X}_i - P_1^T \vec{X}_i\, y_i)\, k$~~

$$y_i P_3^T \vec{X}_i - w_i P_2^T \vec{X}_i = 0 \rightarrow ①$$

$$-[x_i P_3^T \vec{X}_i - w_i P_1^T \vec{X}_i] = 0 \rightarrow ②$$

$$x_i P_2^T \vec{X}_i - w_i P_1^T \vec{X}_i = 0 \rightarrow ③$$

هذا يعني ان one point correspondence give us ~~3~~ 3 equation

Not all these equation are Independant.

اذا ضربنا x_i مع equation(1)

$$x_i ① + y_i ② =$$

$$x_i (1) = x_i y_i P_3^T \vec{X}_i - x_i w_i P_2^T \vec{X}_i = 0$$

$$y_i ② = -y_i x_i P_3^T \vec{X}_i + y_i w_i P_1^T \vec{X}_i = 0$$

$$x_i ① + y_i ② = \text{[illegible]}$$

$$- w_i ③$$

Camera calibration:-

Find. or Compute or Estimate:-

1. Intrinsic prameter (K)
2. Extrinsic prameter (R and T)

$$\underbrace{P_{3x4} = K_{3X3} [\underset{\downarrow \text{Rotation}}{R_{3x3}} | T_{3x1}]}$$

$$\vec{x}_{\text{Image point}} = P_{3x4} \underset{\text{3D world Point in HC}}{\vec{X}_{4x1}}$$

Same Relationship can be written as:

$$\boxed{\vec{x}_{3x1} \underset{\text{Cross Product}}{\times} P_{3x4} \vec{X}_{4x1} = 0}$$

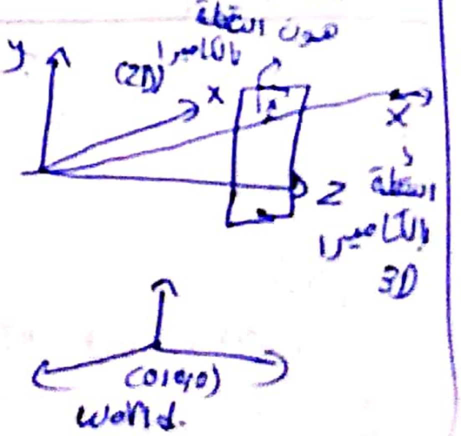
$$\underset{\text{Image Point}}{\vec{x}} = P_{3x4} \underset{\text{3D world}}{\vec{X}_{4x1}}$$ هاي يسمى

Both $\vec{x}$ Image Points and $\vec{X}$ world Point are assumed to be Known. and the goel is to estimat P and thus K, R and T

Hard approach to Perform camera calibration هاد اسمه

$\vec{x}$ Image Point and X world Point are called corresponding Point.

طلما احول النقطة من ال X (2D) ل X 3D بالصورة عرفنا كيف بالس الصعوبة ان كيف بدنا ترجعه للواقع



How to estimate world point form 2D Image point:-

usually difficult or Hard to compute or estimate need manual work.

There for we have other ~~easy~~ easy methods which is fully or semi-automated:-

uses the concept of Image of Absolute conic:- $\Omega^*_\infty = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

Intersection of a sphere with π_∞.

It's Image or forward is the tool for protection of camera celabration.

Lets Now just focus on the Hard approches.

Thus, the assumtion is that we have a set of correspondences.

$$\underset{\text{2D Image Point in HC}}{\vec{x}_1} \longleftrightarrow \underset{\text{corresponding 3D world Points In HC}}{\vec{X}_1}$$

it is very similar to the way we estimated the Homography.

i.e → need to find indpendant equation form each Point corrospondies

Based on them we can constru a big matrix from all the ⟶

$x_i ① + y_i ② = - w_i ③$

Which means that ③ is linearly dependent on both ① and ②

$w_i [x_i P_2^T \vec{x_i} - y_i P_1^T \vec{x_i}] =$

As such each point correspodancies ~~[illegible]~~ only gives us two independent equations.

Now, Recall that P_{3x4} has 12 Parameters and 11 DoF since only ratios mater in HC

So, How many point correspondenses at minimum we nees to compute P_{3x4}? 6 correspondencies point

because every correspondencies point give us 2 equation

we can ungely solve for P.

but How to get K, R, T from P

من خلال ال Rank نشوف ال Rank اذا كان ال Rank لل P

= 3 بنقدر نعبر عنهم.

K, R, T → is dependent on Image

ع يختلف باختلاف الصورة

~~K~~ R, T → is view dependent

K → is fixed →

ليش لانه

بمثل وين ال Principle point موجودة.

forword and Backword Projectiong.

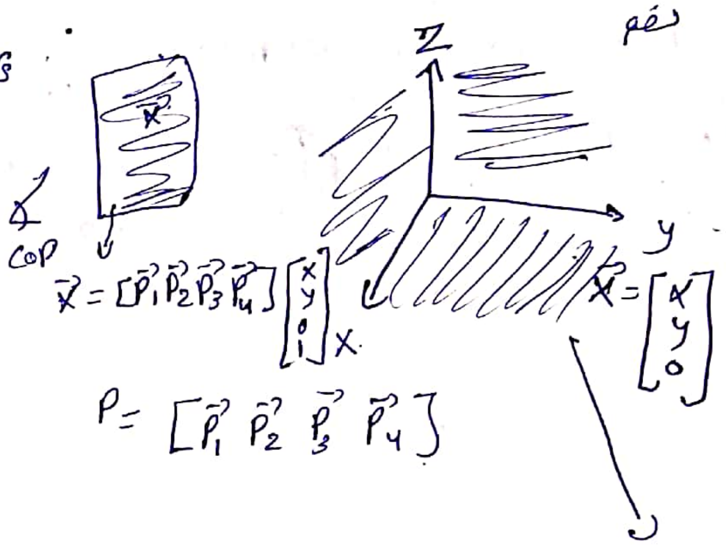
P

في الخلف

لو كان عندي صورة هل بقدر افلي الصورة

Top down View ؟ -

نعم



$\vec{x} = [\vec{P_1} \vec{P_2} \vec{P_3} \vec{P_4}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\vec{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$

$P = [\vec{P_1} \; \vec{P_2} \; \vec{P_3} \; \vec{P_4}]$

كل النقاط بوجد ال Plane ال Z الها = zero

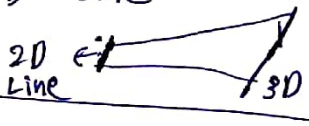
$\underset{\text{Image Point}}{\vec{x}} = [\vec{P_1} \; \vec{P_2} \; \vec{P_3} \; \vec{P_4}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\vec{x}_{3x1} = \underbrace{[\vec{P_1} \; \vec{P_2} \; \vec{P_4}]}_{3x3} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ بنقدر نكتبها هيك

هاي بتمثل Homography

Point corrosponence

Thus if the camera matrix P is know, H can be estimated on the fly.

geometric entity	(Image) forword Projection	Backword Projection
3D point	2D Image point	ده نعمل Backword لل 2D point ده يعطيني 3D Line
3D Line	2D Line 	3D Plane 2D Line → 3D Plane
Plane	homography	does not make sense
Quadrics	~~Conics~~ conic	does not make sense
2D - Conics	does not make sense	2D Conic → cone
Absolute conic which is located at ∞	very $K^{-T}K^{-1}$ special in Painlegs camera calibration	Does not make sense to apply

* we have an Image captured by a certein camera, Then can the Homography that relate x,y ; y,z , x,z planes to the Image Plane be estimated? yes, Provided we can Guess a good estimated for the parameters of p

$$P = \underbrace{\begin{bmatrix} f & 0 & 400 \\ 0 & f & 300 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{K} \left[I_{3\times3} \,\middle|\, \vec{0}_{3\times1} \right]$$

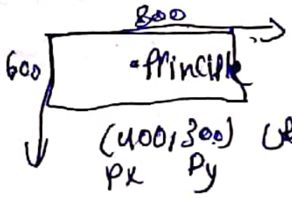
we can assume the camera to have the same digitalization in both x and y direction

we can assume the sensor plane is squre or retangle

camera has no translation with respect to the world fram

Camera has same Rotation as the world Frame

camera and world frame exactly the same



يعني لو كان عندي صورة مثل هيك

ده بفترض انه ال Principle Point بالنص (400,300)
Px Py

Orthogonal camera :-

هاي نوع خاص من ال Affine camer يعني

هي matrix ال P . اخر row فيها =

(0,0,0,1)

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_5 & p_6 & p_7 & p_8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times4} \rightarrow$$ Affine camera هاي اسمها

M

لما ال last row = 000 اذن هاي ⇐ M بتكون singular matrix.

اذا كان عندي software camera و ال rank=3 و ال

camera is located at ∞ has direction

C = Null space (P) → Located هاي

$C = \begin{bmatrix} \vec{d} \\ 0 \end{bmatrix}$ where $\vec{d}$ = Null space of M

Ideal point ←

كيف اعرف ال direction :- هو ال axis اللي بكون عاموديه على ال Principle plane

---

Physical Intiuition associated with the indivisiual column of P:

$$x_{3\times1} = [\vec{p}_1 \; \vec{p}_2 \; \vec{p}_3 \; \vec{p}_4]_{3\times4} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

هاي نقطة بال 3D world ←

هلأ لو بدي اشوف ال column الاول شو بمثل بروح اضربه بنقطة $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$ It's ideal point along x-ax

the $\vec{X}_{3\times1}$ will be its assocated Image point or vanshing point In the Image Plane

ان ال ideal point بال Image اسمها vanshing point

* By the same token if $\vec{X}_{4\times1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\vec{P}_2 \neq \vec{x}$ vanshing point of ideal point along y ~~axis~~ direction

$X_{Image} = P_2 \rightarrow$ هاي من ضرب $[\vec{P}_1 \vec{P}_2 \vec{P}_3 \vec{P}_4]$ مع $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

* if $x_{4\times1} \rightarrow$ 3D world. $= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $x_{4\times1}$ is an ideal point along z-derication, then $\vec{x} = \vec{P}_3$ is a Vanshing point of Image Plane

* هلأ هيك عرفنا P1 و P2 و P3 كل وحدة شو بتمثل خلينا نشوف P4 شو بتمثل كيف من خلال انه افرض $x_{world} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$X_{world} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow$ شو بتمثل ؟.

~~HC of the COP of the camera origin~~

HC of world origin

then $X_{Image} = P_4$

the Image of HC of the world.

هلا عرفنا عل ال Column شو بمثلوا قليلا نشوف ال Row :-

Rows of P :-

هلا عشان امثل ال Row لل P باخد P

P= [redacted]

$$P = \begin{bmatrix} \vec{P}_1^T{}_{1\times4} \\ P_2^T{}_{1\times4} \\ P_3^T{}_{1\times4} \end{bmatrix}_{3\times4}$$

كل من $\vec{P}_1$ و $\vec{P}_2$ و $\vec{P}_3$ عبارة عن Special Plane given In HC

$$\underset{\text{Image Point}}{\vec{X}} = \begin{bmatrix} \vec{P}_1^T \\ \vec{P}_2 \\ \vec{P}_3^T \end{bmatrix} \underset{\text{world Point}}{\vec{X}_{4\times1}}$$

Principle Plane ⇒ ميزته ان ال Z = صفر

$$\underset{\text{Image Point}}{\vec{X}} = \begin{bmatrix} \vec{P}_1^T \vec{X} \\ \vec{P}_2 \vec{X} \\ \vec{P}_3^T \vec{X} \end{bmatrix}$$

لو اخد النقاط الي تعطي Projective خلف الكاميرا

رح تكون هيك النقطة $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{P}_1^T \vec{X} \\ \vec{P}_2^T \vec{X} \\ \vec{P}_3^T \vec{X} \end{bmatrix}$$

$$\underset{(1\times4)}{\vec{P}_3^T} \; \underset{\substack{4\times1 \\ \text{world Point}}}{\vec{X}} = \vec{0}$$

this must be plane equation In other words, its the principle Plane. In HC.

* دائما ال Principle Plane تكون خلف الكاميرا

What's about Row1, Row2