



إحصاء وإحتمالات

سحر المشاقبة

للطالبة المبدعة
رند الشوبكي

إرادة - ثقة - تغيير

* عشان اوسط mean مجموع العناصر / عدد العناصر $\text{mean} = \text{center} = \text{avg}$ (مركز لغير زوج)

* عشان اوسط median

↓ فردى زوجي

↓ تأخذ العدد

الذي يقع اوسط

↓ تأخذ العدد (بجانب اوسط) ونقسم على 2

* mod من العنصر الأكثر تكرر

* الانتباه إلى أهمية الترتيب للعناصر

* trimmed mean : تأخذ نسبة العنصر * عدد العناصر $1 - \alpha = \text{tr}$ (مثلاً عدد عناصر 10 ونسبة 0.2)

من رمز \bar{x} يعني mean من رمز \tilde{x} يعني median

$$\text{Max} - \text{Min} = \text{Range} *$$

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

← القيمة الأولى → mean

= variance *

* طرق سواء histogram or scatter or stem plot جميعها لها فوائد وهو تقريب

لا قرب نقطة في المنتصف

$\frac{p}{\sum f} = \text{Relative Frequency} *$ $\frac{\text{class midpoint}}{2} = \text{Class midpoint} *$ Histogram

(لأن مجموعهم يساوي 1)

عشان اطلع \bar{x} عن طريق $\frac{F * \text{mid}}{\sum f}$ أو $\text{class mid} * \text{Relative}$

← عشان اطلع outlier لازم اطلع Q_1 و Q_3 و $L.L$ و $U.L$

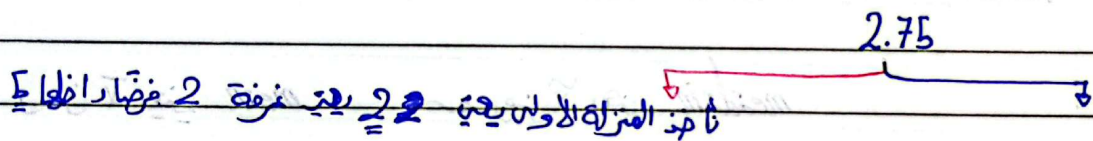
* Q_1, Q_3 لازم يكون عنده Location value

Q_1 ← نسبة 25% و لازم الرقم اطلع بين رقمين الى الموقع

* شكل عام عشان اكتب location ← النسبة $(n+1)^*$

Q_3 ← نسبة 75%

شكل عام عشان اكتب value مع فرضه ان Location طلع 2.75



$$\left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right) * \left(\begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right) + 0.75$$

↓
 هاد الباقي منه 2.75

متر 2.75 يعني بينه (2,3)

* نروح افترقة 2 و 3 ونأخذ القيمة الكبيرة - الصغيرة

$$IQR = (Q_3 - Q_1)$$

← الى مسيناهم فرقته

$$L.L = Q_1 - 1.5 * IQR \quad U.L = Q_3 + 1.5 * IQR$$

* median موزونى امسب اذكار طالب outlier وه مينة فقه بالرسمة ونحسها زي قبل

* Percentile ه نفس الفرمة السابقة وكن حسب نسبة الي تكون مظهر بالسؤال

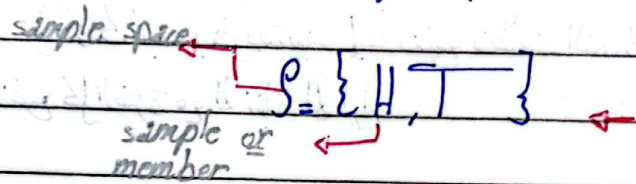
Ex :- {3, 7, 8, 5, 12, 14, 21, 13, 16, 18} نسبة 62%

Location = $14 \times 62\% = 6.82$
value ترتيب العناصر {3, 5, 7, 8, 12, 13, 14, 16, 18, 21}

موقع 6
 $13 + 0.82(14 - 13) = 13.82$
النتيجة

* نهاية المثال 1

* التجربة الاممائية: أي تجربة ينتج عنها نتيجة
* Sample space : ه مجموعة تتكون من جميع نتائج التجربة



* ه كتابه sample space بأكثر من تعبير ممكن: بالأرقام او الـ even, odd ممكن كتابته

* Events : ه جزء من sample space تتجمع منه صفة مشتركة

Important notes ***

at least ← يعني الرقم من ضمن الفترة → at most

greater than ← يعني الرقم خارج الفترة → less than

Complement * :- وفيه يعني المتبقي (الناقص من sample space) $A \rightarrow A'$
متبقي

intersection * :- تقاطع يعني النطاق المشتركة بين العناصر \cap

← الحوادث المنفصلة : لما يكون ما في تقاطع مشتركة ممكن اجيب \emptyset or $\{ \}$

disjoint or mutually exclusive

Union * : الاتحاد يعني اتحاد جميع العناصر من غير تكرار

← لما يكون السؤال معطى فترة وطالب فترة ممكن كتابته بطريقتين إما نضع نطاق الذي كان
من ضمن الفترة (يعني نأخذ مع المساواة) او نضع كل الفترة مع الانتباه للأطراف
Ex 2.12

Venn diagrams * :- توضيح العلاقة بين الامتداد و sample space

* بعد اعرف عدد الاحتمالات من خلال ضرب $n_1 \times n_2$

* لما السؤال يكون معطى مجموعة ارقام يكون المقصد $[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$

*** الانتباه الى شرط السؤال

* بنوعه السؤال boys, girls نبدأ بالأكثرونداً مع الانتباه الى الشرط
بحال كان شرط $all\ the\ same$

* دائماً نبدأ بالشرط * لما يكون عندي سؤال طالب شرط : even يعني متناوبه للأعداد لا نجد زوج

* إذا كان طالب شرط زوجي من غير تكرار وكان في عدد طفر ومنازل الختمه في يكون الحل على موهلتيه
ووجدها نجمع ناتج كل موهلة

* يتم جمع بحاله التبادل لأنها عدد موهلتيه ونفعله

* Permutation : تبادل هو شرطها الاختلاف
الترتيب

نوجد حالات عدة من تبادل :-

1 Case 1 - ترتيب جميع العناصر $n!$ شرط الاختلاف

2 Case 2 - ترتيب جزء من العناصر $\frac{n!}{(n-r)!}$ ونفعلها بشكل سؤاله غير قانون
من ترتيب موهلتيه وتوزيع وظرفه موهلة

3 Case 3 - ترتيب العناصر التي تكون على شكل اقرب $n!$ مجموع ارقام مقام = البسط
التاليه من الحل $n_1! n_2! \dots$

4 Case 4 - شبه الخاله في ولكن انا الى ارج اوزع القوياد $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots}$

5 Circular : يكون بالسؤال واضح بشكل مريح انه دائري $(n-1)!$

Subject :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad *$$

لما يكون مولدات متقاطعة يعني ما في تقاطع مشتركة يكون $P(A \cap B) = 0$ يعني بصير القانون

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad *$$

* لو كان عندك اكثر من عنصر متحدد يعني $P(A \cup B \cup C \dots)$ وما في تقاطع فقط بنجمع $P(A) + P(B) + P(C) \dots$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + \dots = P(S) = 1 \quad \text{Partition} \quad \text{يعني} \quad \{A_1, A_2, \dots\} \quad *$$

Example 2.36 : عندي مجربتين نزيد بيكم احتمال انهم يعطو مجموع 7 وكم احتمال يعطو مجموع 11

مجموع 7 $\rightarrow A = \{6,1\}$
 $\{1,6\}$
 $\{5,2\}$
 $\{2,5\}$
 $\{4,3\}$
 $\{3,4\}$

مجموع 11 $\rightarrow B = \{6,5\}$
 $\{5,6\}$
 $\{2\}$
 $\frac{2}{36}$

صاح 36 $\rightarrow 6$
 $\frac{6}{36}$

عندي مجربتين نزيد يعني 6×6

حسب القانون $P(A \cup B) = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36}$

أو ممكن حله كالتالي

مجموع قروب A + قروب B يعني مباشر $\frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36}$

* لما مثلا السؤال يكون one of these يعني اتحاد

$$P(A) + P(A') = 1 \quad *$$

*** مثال 2.53 no defect \rightarrow الجواب قانون التمام

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$$

Subject :

يعني اعطى معلومة

: Conditional *

$$P(A|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)}$$

↑
احتمال الحدوث الثاني

given that , if

من اجل المستقيها :-

Conditional probability :- احتمالية event للشرط يعني يكون عنده 2 event ولكن بشرط event يكون حدث

Independent * هـ هو انهما مستقلة يعني احتمالية حدوث الحدوث الاول لا تؤثر على

احتمالية حدوث الثاني مع احتمالية حدوثهم مع بعض

(بحثوا بقدر الوقت وما أثروا على بعض)

$$P(A \cap B) = P(A) P(B|A)$$

القانون هـ -

↑
dependent

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

القانون هـ

↑
indep

* استثناء نقطة :- طريقة حل [السؤال -]

التوالي هـ - تقاطع يعني ما حل ضرب

التوازي هـ - اتحاد يعني قانون الاتحاد

Subject :

* Bayes' Rule

كيف نحدد؟ \rightarrow يكون سؤال طويل + يكون معظم معلومات أكثر

طريقة الحل : بنزل جدول بالأرقام المعتبر ونسبة $P(D)$ بعينه بفرضهم يعرفه
قال توضيحه

	B_1	B_2	B_3	$P(D)$
	30%	45%	25%	
* نسبة التي يتكونها Defective	2%	3%	2%	
	0.006	0.013	0.005	$\Sigma D = 0.024$

نوعاً آخر \rightarrow probability B_3 \leftarrow * $\frac{0.005}{0.024}$

تتابع

* Random variable : هو Function واقعة خامة ومربوطة value sample

Capital letters : بحرف عن random

Small letters : نقطة value الخاتم random

* discrete sample : يعني بقدر الفصل والامساك امتمالية لكل جرم وراثياً على شكل جدول

* continuous sample : يعني ما بعد الفصل ابداً \leftarrow (على طول الفترة)

Subject :

probability distribution

عشان اعدد لازم random [او بـ] [2] احتمال

$\sum P(x) = 1$ ← $f(x) \geq 0$ ← $P(X=x) = f(x)$ ←

*** بالعادة تكون جميع الاسئلة متعلقة بتوافيق

$1 = \binom{n}{n}$ $1 = \binom{n}{0}$ ***

F(x) cumulative distribution function *

m	0	1	3
P(X=m)	1/3	1/2	1/6

مثال توضيح : افترقة الاحتمال

$$F(m) = \begin{cases} 0 & m < 0 \\ 1/3 & 0 \leq m < 1 \\ 5/6 & 1 \leq m < 3 \\ 1 & m \geq 3 \end{cases}$$

* $\rightarrow P(1) = F(1) - F(0) = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

* $\rightarrow P(3) = F(3) - F(2) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$

* $\rightarrow F(1) = \frac{5}{6}$

$\sum P(x) = F(x)$ ← احتمال ← f(x) ***

continuous ← Probability density fun *

Subject :

بكون صود التكامل حسب المطلوب ونظرا لانه طبيعي

$$\int_{-\infty}^x$$

بكون كدالة x

cumulative distribution Fun

$$P = F(1) - F(0)$$
$$\frac{1+1}{9} - \frac{0+1}{9}$$

↔

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{3}{x+1}, & -1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

لومثلا كان عندنا

يعني نوجد
دائرا لانه

بكون حدود التكامل حسب المطلوب ونظام بياني طبيعي

$\int_{-\infty}^x$ cumulative distribution Fun \rightarrow x \rightarrow دالة x

لو مثلاً كان عندي

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{3}{4}(x+1), & -1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

$P = F(1) - F(0) = \frac{3}{4} - \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$

يعني بقولنا
دافع الأجزاء

$\binom{2}{x}$ دائماً عندها عندها التوافقية

continuous Density \rightarrow كثافة $***$

لما يكون المطلوب احتمالية لـ continuous \rightarrow نخرج value الجوف على (يعني من غير دالة x) $***$

ex 3.6 $*$

$$\frac{1}{9} \leftarrow -\frac{2000}{2} \left[(x+100)^{-2} \right]_{200}^{\infty}$$

$$0.1020 \leftarrow \frac{2000}{80} \int_{80}^{120} (x+100)^{-3} dx$$

ex 3.7 $*$

100 hours \rightarrow 1 $\boxed{x=1.2}$
120 " \rightarrow x

$$0.68 = \int_0^{1.2} x dx + \int_{1.2}^2 (2-x) dx$$

لا يفترق ضمن الفترة (1.2)

Subject :

100 hour = 1 *

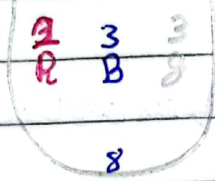
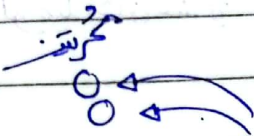
* $x = 0.5$

50 hours $\rightarrow x$
100 $\rightarrow 1$

[b]

* $0.375 = \int_{0.5}^1 x dx$

Joint probability *



x, y discrete variable *

discrete variable

y \rightarrow red x \rightarrow blue

* $P(0,0) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28}$

* $P(1,0) = \frac{\binom{3}{1} \binom{3}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{9}{28}$

	0	1	2	total
0	3/28	9/28	3/28	15/28
1	3/14	3/14	0	3/7
2	1/28	0	0	1/28

لازم است که مجموع از یک کمتر

* $P(2,0) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28}$

* $P(0,1) = \frac{\binom{2}{1} \binom{3}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{14}$

لازم است که مجموع = 1 ***

$1 = \sum P_{ij}$ *

Total لازم است که Joint ***

Subject :

$$(1,0) / (0,1) / (0,0) \quad \leftarrow x+y \leq 1 \quad [b]$$

$$* \frac{9}{14} = \frac{9}{28} + \frac{3}{14} + \frac{3}{28}$$

∴ Joint [continuous] *

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy$$

*** نبدأ من أعلى اليمين ونعبر يميناً عن كل نقطة x

-3 Ex 3.15

$$\int_0^1 x^2 + 3yx \, dy \quad \leftarrow \int_0^1 \int_0^1 2x + 3y \, dx dy \quad \leftarrow \frac{2}{5} \int_0^1 \int_0^1 (2x + 3y) dx dy$$

$$1 = \frac{2}{5} * \frac{5}{2} \quad \leftarrow \int_0^1 y + \frac{3}{2} y^2 \, dy \quad \leftarrow \int_0^1 1 + 3y \, dy$$

$$\int_{0.25}^{0.5} \frac{1}{4} + \frac{3}{2} y \, dy$$

$$\int_{0.25}^{0.5} \int_{0.25}^{0.5} x^2 + 3yx \, dx dy$$

$$\frac{2}{5} \int_{0.25}^{0.5} \int_{0.25}^{0.5} 2x + 3y \, dx dy [b]$$

$$* \frac{13}{160} = \frac{2}{5} \int_{0.25}^{0.5} \frac{1}{4} y + \frac{3}{4} y^2 \, dy$$

-8 Marginal distribution *

$$g(x) = \sum_y f(x,y) \quad , \quad h(y) = \sum_x f(x,y) \quad \leftarrow \text{discrete}$$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy \quad , \quad h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx \quad \leftarrow \text{continuous}$$

Subject :

$$3/28 = g(2) *$$

$$15/28 = g(1) *$$

$$5/14 = g(0) *$$

3.16

↓
نقطة x

$$1/25 = h(2) *$$

$$3/7 = h(1) *$$

$$15/28 = h(0) *$$

$$* \int_0^1 g(x) = \int_0^1 dy \Rightarrow \frac{2}{5} \int_0^1 2x+3y dy = 3.17$$

$$\frac{2}{5} (2xy + \frac{3}{2}y^2) = \frac{yx+3}{5}$$

$$* h(y) = \int_0^1 dx \Rightarrow \frac{2}{5} \int_0^1 2x+3y dx \Rightarrow \frac{2}{5} (x^2+3yx) \Big|_0^1 = \frac{2(1+3y)}{5}$$

function نقر ←

$$P(y/x) = \frac{f(x,y)}{g(x)} *$$

$$P(x/y) = \frac{f(x,y)}{h(y)} *$$

marginal لا شرط conditional لا شرط ***

* given that $y=1$

$$P(x=0 | y=1) \quad \text{Ex 3.18}$$

$$\frac{3/14}{3/7} \Leftarrow * P(x=1) = \frac{f(x,1)}{h(1)}$$

$$* h(1) = 3/7$$

$$* P(x/y) = 0$$

Subject :

$$a] * g(x) = \int_x^1 10xy^2 dy = \frac{10x}{3}(1-x^3)$$

Ex 3.19 سؤال شرطية

$$* h(y) = \int_0^y 10xy^2 dx = 5y^4$$

$$* \rightarrow P(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)} = \frac{10xy^2}{\frac{10}{3}x(1-x^3)}$$

$$b] P(y > 0.5 | x = 0.25) :$$

*** طريقة الحل :-

نقوم بقية التابت داخل $P(y|x)$ ونكامل بالنسبة للمتغير مع مراعاة الحدود

$$P(y > 0.5 | x = 0.25) = \frac{3y^2}{0.82}$$

← حد y من التوزيع

$$\int_{0.5}^1 \frac{3y^2}{0.82} dy = \frac{8}{9}$$

$$* g(x) = \int_0^1 x + 3y^2x dy \Rightarrow \left[\frac{xy + y^3x}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}(x+x) = \frac{x}{2}$$

Ex 3.20

$$* h(y) = \int_0^2 x + 3y^2x dx \Rightarrow \left[\frac{x^2 + 3y^2x}{2} \right]_0^2 = \frac{1+3y^2}{2}$$

$$* P(x|y=1/3) = \frac{f(x,y)}{h(y)} = \frac{x}{2} \Rightarrow \int_{1/4}^2 \frac{x}{2} dx = \frac{3}{64}$$

*** 1] المساواة بين الحدود غير مهمة

2] ممكن بالاقتران النهائي ما يكون في الحد التابت وبهذه الحالة تكامل مباشرة [بمسؤل conditional]

Statistical Independence *

$P(x|y) = g(x) * h(y)$ إذا ذكر السؤال انه ind يعني ***

$$P(0,0) = 3/28$$

→ Ex 3.21

$$g(0) = \frac{5}{14} \quad h(0) = \frac{15}{28}$$

$$\frac{5}{14} * \frac{15}{28} \stackrel{?}{=} \frac{3}{28} \quad X$$

$$\therefore P(0,0) \neq g(0) * h(0)$$

statistical independent الكان ← $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = P_1(x_1)P_2(x_2) \dots *$

$$f(x_1, x_2, x_3) = P(x_1)P(x_2)P(x_3) = e^{-x_1} e^{-x_2} e^{-x_3} = e^{-x_1 - x_2 - x_3} \quad \text{Ex 3.22}$$

$$P(x_1, x_2, x_3) = \int_0^{\infty} \int_0^3 \int_0^2 e^{-x_1 - x_2 - x_3} dx_1 dx_2 dx_3$$

$dx_1 dx_2 dx_3$

* نكمل كل حد لانه الباقي غير موجود

$$* \int_0^2 e^{-x_1} dx_1 = -e^{-x_1} \Big|_0^2 = \boxed{-e^{-2} + 1}$$

$$* \int_0^3 e^{-x_2} dx_2 = -e^{-x_2} \Big|_0^3 = \boxed{-e^{-3} + 1}$$

$$* \int_0^{\infty} e^{-x_3} dx_3 = \boxed{0 + e^{-0} = 1}$$

$$\therefore (-e^{-2} + 1) * (-e^{-3} + 1) * 1 = 0.0372 *$$

نحوه شایر 3

Subject:

المسألة 4

center of the data = $\mu(x)$ = Avg. = Expected value*

$$P(0) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{35} \quad / \quad P(1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{2}}{35}$$

0	1	2	3
$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

Ex 4.1

$$P(2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{3}{1}}{35} \quad / \quad P(3) = \frac{\binom{4}{3}}{35}$$

0000
 $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ N & D \end{pmatrix}$

$$\mu(x) = 0 \cdot \frac{1}{35} + 1 \cdot \frac{12}{35} + \frac{18}{35} \cdot 2 + 3 \cdot \frac{4}{35} = \frac{12}{7}$$

في نسبة المبيعات

x	0	1000	1500	$\frac{2500}{1000+1500}$
P(x)	18%	42%	12%	28%

Ex 4.2

P(0)

$$*P(A \cap B') = 30\% \cdot 80\% = 18\%$$

P(1000)

$$*P(A \cap B) = 70\% \cdot 60\% = 42\%$$

P(1500)

$$*P(A' \cap B) = 30\% \cdot 40\% = 12\%$$

P(2500)

$$*P(A \cap B) = 70\% \cdot 40\% = 28\%$$

$$*E(x) = 0 \cdot 18\% + 1000 \cdot 42\% + 1500 \cdot 12\% + 2500 \cdot 28\%$$

المسألة طلب بالسيارة / commission

$$\mu(x) = \int_{100}^{\infty} x \cdot \frac{1}{x^3} dx \rightarrow 2000 \int_{100}^{\infty} x^{-2} dx = 2000 \left(\frac{1}{x} \right) \Big|_{100}^{\infty}$$

Ex 4.3

$$-2000 \left(0 - \frac{1}{100} \right) = 2000$$

Subject :

بفرض النظر في sample باخذ $F(x)$ وبفرضه ***

x → number of cars Ex 4.4

$g(x)$ → represent the amount of money.

المطلوب : اوجد $F(x)$ | $g(x)$ **متقطع** discrete

من الجدول التالي ← $2 \times 4 - 1$

$g(x)$	7	9	11	13	15	17
$P(x)$	1/12	1/12	1/4	1/4	1/6	1/6

$$E(g(x)) = \frac{7}{12} + \frac{9}{12} + \frac{11}{4} + \frac{13}{4} + \frac{15}{6} + \frac{17}{6} = 12.67$$

$$\int_{-1}^2 (4x+3)x^2 dx \rightarrow \int_{-1}^2 4x^3 + 3x^2 dx = 8$$

Ex 4.5

Joint function of the Joint ***

Ex 4.6

$$0 \times 0 \times \frac{3}{28} + 0 \times 1 \times \frac{3}{14} + 0 \times 2 \times \frac{1}{28} + 0 \times 1 \times \frac{3}{14} + 1 \times 1 \times \frac{3}{14} + 1 \times 2 \times 0 + 2 \times 0 + 0 + 0 = \frac{3}{14}$$

Ex 4.7

$$\int_0^1 \int_0^2 dx dy \rightarrow \int_0^1 \int_0^2 \frac{y}{x} (1+3y^2) dx dy$$

$$\int_0^1 (y+3y^3) dx = yx + 3y^3x \Big|_0^2 = \int_0^1 2y + 6y^3 dy$$

$$\int_0^1 2y + 6y^3 dy \rightarrow y^2 + \frac{6}{4}y^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

Marginal *

* $f(x) = x * g(x)$ * $f(y) = y * h(y)$

Variance and Covariance *

1 variance

$\Rightarrow \sigma^2 = \sum (x - \mu)^2 f(x)$ discrete

* $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$ Continuous

مثال 4.8 : عندنا اعداد لازم احسب التباين

1) $\mu_A = 1 * 0.3 + 2 * 0.4 + 3 * 0.3 = 2$

2) $(1-2)^2 * 0.3 + (2-2)^2 * 0.4 + (3-2)^2 * 0.3 = 0.6$
 \downarrow
 μ_A

1) $\mu_B = 0 * 0.2 + 1 * 0.1 + 2 * 0.3 + 3 * 0.3 + 4 * 0.1 = 2$

2) $(0-2)^2 * 0.2 + (1-2)^2 * 0.1 + (2-2)^2 * 0.3 + (3-2)^2 * 0.3 + (4-2)^2 * 0.1 = 1.6$

* $\sigma_B^2 > \sigma_A^2$

$\Rightarrow \sigma^2 = E(x^2) - (E(x))^2$ * قانون التباين

هذا القانون يمكن استخدامه عندما يكون التباين كبيراً جداً وهو سهل وأسرع للحل

Subject :

$(g(x) - E(g(x)))^2 \leftarrow (x - E(x))^2$ لا يجوز عنده $g(x)$ بنظر القانون الأول *

$[\sigma_{xy}]$ Covariance **

$$\sigma_{xy} = E(xy) - E(x) * E(y) \quad \leftarrow \leftarrow$$

$$\sigma_{xy} = E(xy) - E(x) * E(y) \quad \text{Ex 4.14}$$

$$* g(x) \rightarrow \int_0^x xy \, dy \rightarrow \frac{8}{2} (xy^2 \Big|_0^x) = 4x^3$$

$$* g(x) = 4x^3 \quad 0 < x < 1 \quad \leftarrow \text{وكأنه يغيره صيغة}$$

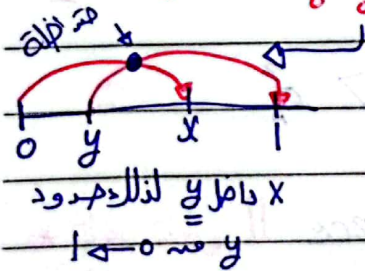
$$* h(y) = \int_y^1 xy \, dx \rightarrow y(x^2 \Big|_y^1) = 4y - 4y^3$$

$$* h(y) = 4y(1-y^2) \quad 0 < y < 1 \quad \leftarrow \text{وكأنه يغيره صيغة}$$

$$\Rightarrow E(x) \Rightarrow \int_0^1 x g(x) \, dx \Rightarrow \int_0^1 x 4x^3 \, dx = 4/5$$

$$\Rightarrow E(y) \Rightarrow \int_0^1 y h(y) \, dy \Rightarrow \int_0^1 4y(1-y^2) * y \, dy = 8/15$$

$$\Rightarrow E(xy) = \int_0^1 \int_y^1 xy(xy) \, dx \, dy = 4/9$$

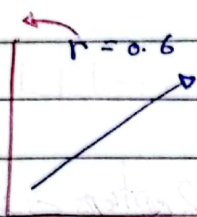


$$\sigma_{xy} = 4/9 - 4/5 * 8/15 = 4/225 \quad **$$

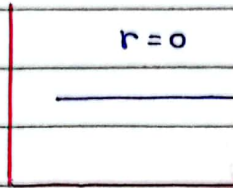
Subject :

Correlation Coefficient * مجال الارتباط

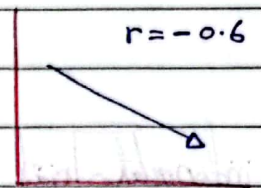
يطلق عليه معامل الارتباط



x و y مع بعضهما



x و y مستقلين



x و y عكس بعضهما

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

*** مانس انه منفرد جبر ***

* $E(x)$ متوقع على جميع الاحتمالات ولا تفرق الاختيار إما بالتوزيع أو بالتعريف

$$\frac{25}{6} + \frac{169}{2} + \frac{361}{3} = 209$$

$$\leftarrow E((2x+1)^2)$$

Ex 7.55

$$\text{or } (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 \rightarrow 4E(x^2) + 4E(x) + 1 = 209$$

← وينقل الاختيار الاسرى بالحل

نوع الثابت 4 *

شأنه 5 يوجد انواع ال Discrete وبهذا الثابت سيتم طرحها

Uniform: أي Distribution قيمة احتمالية ثابتة بغير انظره قيمة random

sample

$$P(x,n) = \frac{1}{h}$$

Subject :

$$\text{constant } (p) = 0.4 \quad n = 15 \quad \text{Ex 5.2}$$

$P(x \geq 10)$ ← ما أتته أكبر من 10 خارج تقديركه مباشرة لذلك [a]

$$P(x \geq 10) = 1 - (P(x < 10))$$

← نفس الأشارة

*** عندما يكون يوم مساواة على طرف فإن الطرف الأخر لنه يحوي مساواة

$$1 - P(x < 10)$$

*** ولا في اليوم مساواة تقوم بأخذ الأقل منه مباشرة من الجدول يعني تأخذ $n=9$

$$1 - 0.9662 = 0.0338 \quad \times$$

$P(3 \leq x \leq 8)$ ← تقوم بالاتي * نكتب أن 3 غير موجودة $x \leq 8$ ← من الجدول [b]

* نكتب أن 8 غير موجودة $x < 3$ ← لأنها أكبر من تأخذ في n

$$0.9050 - 0.0271 = 0.8779 \leftarrow F(8) - F(2) = P(3 \leq x \leq 8) \therefore$$

$$F(5) - F(4) \leftarrow 0.4032 - 0.2173 = 0.1859 \quad P(x=5) \leftarrow \text{من الجدول} \quad [c]$$

*** عندما يطلب السؤال exactly نقوم بالطرح من الذي قبله ومنه ما يكون أكبر أو أصغر من النتيجة

*** لما مثلما يكون السؤال $P(x < 10)$ بنخذ $n=9$ ولما يكون $P(x \leq 10)$ بنخذ $n=10$

constant = 0.03

Ex 5.3

$$1 - P(x < 1)$$

كالتالي

$$P(x \geq 1)$$

[a]

$$1 - \binom{20}{0} \times (0.03)^0 \times (0.97)^{20-0}$$

const = 0.03

$$= 0.4562$$

shipment
بالتالي

shipments بحيث ان في كل الفاعل لا في 9 اطي 1 dot 2odivis ?

$$P(y=3) = \binom{10}{3} 0.4562^3 \times (1 - 0.4562)^7$$

n=10

constant=0.3

Ex 5.4

$$F(3) - F(2) \Rightarrow 0.6496 - 0.3828 = 0.2668 \Rightarrow P(x=3)$$

[a]

$$1 - P(x \leq 3)$$

$$\Rightarrow P(x \geq 3)$$

[b]

$$1 - 0.6496 = 0.3504$$

center, avg, E(x), M(x)

$$np = \text{mean}$$

*

$$npq = \sigma^2$$

*

$$P(x \geq 6)$$

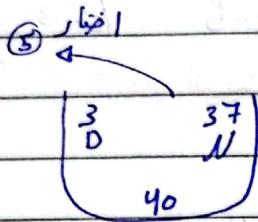
Ex 5.6

10 الف 6 الف

Hypergeometric : بقول عوشة قرصات *

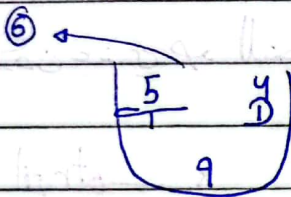
*** يعني ما هو غير استعمال قانونه وذا لشيء طريقة التوافقية

$h(x, n, N, K)$ ←
 total number ↓
 sample size ←
 عدد الخيارات ←



$x=1$ ← exactly 1 Def المطلوب Ex 5.9

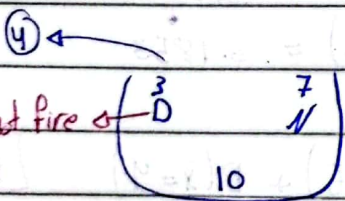
الـ : $0.3011 = \frac{\binom{3}{1} \binom{37}{4}}{\binom{40}{5}}$



$\sum x=2$ ← D Ex 5.31

$\frac{5}{14} = \frac{\binom{4}{2} \binom{5}{4}}{\binom{9}{6}}$

*** الـ بالاحتمال هو المعنى



Ex 5.32

$\frac{1}{6} = \frac{\binom{7}{4} \binom{3}{0}}{\binom{10}{4}}$

$\sum x=4$ [A]

almost 20 [B]

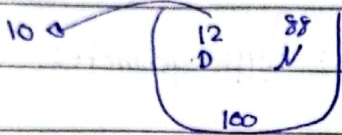
1] $x=0 \rightarrow \frac{1}{6}$

2] $x=1 \rightarrow \frac{\binom{3}{1} \binom{7}{4}}{\binom{10}{4}}$

$x=2 \rightarrow \frac{\binom{3}{2} \binom{7}{2}}{\binom{10}{4}}$

$\sum x \rightarrow \frac{29}{30} *$

Subject :



$$0 \leftarrow x=3$$

Ex 5.10

$$0.08 = \frac{\binom{12}{3} \binom{88}{7}}{\binom{100}{10}}$$

$$\frac{5+3}{40}$$

$$\leftarrow \frac{N = nk}{N}$$

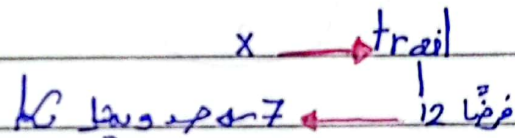
sample size

$$n=5 \quad k=3 \quad N=40 \quad \text{Ex 5.11}$$

عدد الانبيء المتواجدين \downarrow total

Negative Binomial *

*** لازم يكون عندي حد للنجاح ورمزه k وبقية شروط مثل Binomial



* السؤال مكتبي انه اذا فازوا ب 4 عباريات من اصل 7 فم قانون [A] Ex 5.14

$$b^*(6; 4, 0.55) = 0.1853$$

مع قانون

$$P(x=7) + P(x=6) + P(x=5) + P(x=4) \quad [B]$$

$$P(x=3) + P(x=4) + P(x=5) \quad k=3 \text{ من اصل } 5 \quad [C]$$

∴ Geometric *

* يكون سؤال عن رقم عشوائي يكون

*** على الأنت و هو دالة Geometric في البداية

$$0.01 * (1 - 0.01)^{5-1} \quad \leftarrow \quad P^x = x \quad 0.01 = \frac{1}{100} \quad \leftarrow P \quad \text{Ex 5.15}$$

$$\leftarrow g(x;p) = pg^{x-1}$$

successful call يعني سيد الخط منقول

P=0.05 Ex 5.16

x=5

$$0.05 * (1 - 0.05)^4 = 0.041$$

∴ Poisson *

* سؤال عن اشي معين فلا فترة او مساحة معينة هو بخرام الجبل

x ← رقم على x في سؤال هنا

* avg & mean ← k *

variance = mean ← k *

* x=6

* k=4

← l=1

λ=4

Ex 5.17

$$P(6;4) = \frac{e^{-4} (4)^6}{6!}$$

Subject :

Ex 5.19 فترة السؤل معة

السؤل يسأل عن مزة كل لدا، فهو Bernoulli و $P=0.005$ بما أن الاحتمال تقريباً منفر n و n كبيرة يعني مزاها على Poisson

والافتراض على Poisson

$$\mu = 2 \quad \text{و} \quad \mu = np \quad \leftarrow \quad n = 400 \quad P = 0.005 \quad \boxed{a}$$

$$0.271 = e^{-2} 2^1 \quad \leftarrow \quad P(x=1) \quad \therefore$$

$$3, 2, 1, 0 \quad \leftarrow \quad \text{at most 3 day} \quad \boxed{b}$$
$$P(x=3) + P(x=2) + P(x=1) + P(x=0)$$

$$0.135335 = e^{-2} \quad \leftarrow \quad 0.135335 \quad \leftarrow \quad P(x=0) \quad \leftarrow$$

$$0.27067 = \frac{e^{-2} \times 2^1}{1!} \quad \therefore P(x=1) \quad \leftarrow$$

$$0.27067 = \frac{e^{-2} \times 2^2}{2!} \quad \therefore P(x=2) \quad \leftarrow$$

$$0.18044 = \frac{e^{-2} \times 2^3}{3!} \quad \therefore P(x=3) \quad \leftarrow$$

$$\ast \quad 0.857 = 0.135335 + 0.27067 + 0.27067 + 0.18044 \quad \therefore$$

Subject :

$$x < 7$$

$$n = 2000$$

$$P = \frac{1}{1000} = 0.001 \quad \text{Ex 5.20}$$

$$\mu = np = 2$$

$$\times \boxed{0.3134}$$

المطلوب $(x < 7) \leftarrow$ هو عدد $n = 6$ $\lambda = 2$

$$\lambda = 2 \quad \lambda = 2 \quad b = 1 \quad \text{Example}$$

$$0.1429 - 0.8571 = 1 - P(x \leq 3) = 1 - P(x < 4) = P(x \geq 4) \quad [a]$$

zero [B]

نوايه ثابتة 5 \times

ثابتة 6

* يتم ذكر نوع Distributions بشكل مباشر بالسؤال [وثابتة 5 لا يتم ذكر نوعه بل يجب تحديده]

"Some Continuous Probability Distributions"

Uniform Distributions : يكون الاحتمالية ثابتة في جميع النقط عند توزيع random ويكون على فترة

$$f(x; A, B) = \begin{cases} \frac{1}{B-A} & ; A < x < B \\ 0 & ; \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4} & ; 0 < x < 4 \\ 0 & ; \text{elsewhere} \end{cases} \quad [0, 4]$$

$$[a] \quad \text{Ex 6.1}$$

$$0.5 = \int_3^4 0.25 dx = P[x \geq 3] \quad [b]$$

Subject :

Normal Distribution [2]

Normal curves

["A"] "مختلفة ولكن "σ" متساوية

["B"] "μ" متساوية ولكن "σ" مختلف حيث σ الأبعد من مركزه أكبر

["C"] "μ" مختلف و"σ" مختلف

Properties of the normal curves

(1) mode :- الأكثر تكرار يكون عند المنتز

(2) مساهمة 1 = مساهمة 2

(3) $\mu - \sigma < X < \mu + \sigma$

(4) المنحنى يكون بالشكل الأفقي اقرب للمركز

(5) $1 = \text{total area}$

σ standard deviation

μ mean *

* في قانون ولان لا يستخدم في بنظره جدول As

Standard normal distribution

1 = variance * 0 = mean *

* بشرط احويل x الى z عن طريق ايجاد اقدر اهل من الجدول

*** لما يذكر جدول standard normal يعني بعد احويل من الجدول ويكون بداية z

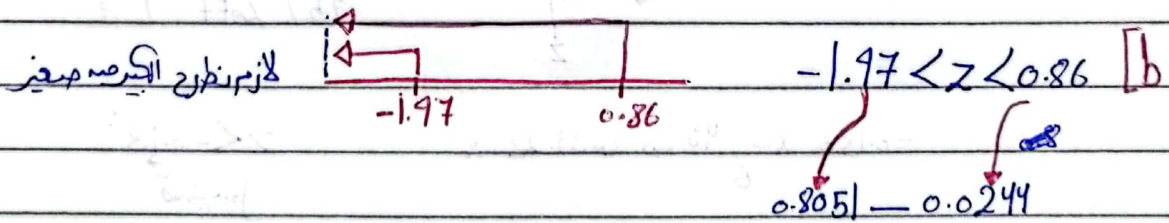
*** الجدول بحسب الاتجاه الوجهة اليسار الاقل من 0 واذا كان من اليمين تأخذ القيمة

قانون التحويل :- $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

6.2 x a :- طالب السؤال $z = 1.84$ من اليمين
طريقة الحل :-

* بما اننا لنبين من اليمين ونخوفنا من القيمة
* 1.8 - تمثل الجزء العاود من الجدول و 0.04 - الجزء الاقصى

$\therefore 0.0329 = 1 - 0.9671$

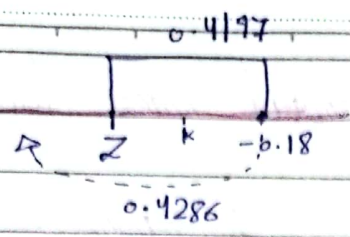


6.3 x a :- $0.3015 = (z > k) -$ \leftarrow مهة الاكبر من اليمين ف تأخذ من القيمة

$1 - 0.3015 = 0.6985$

$0.52 =$ نتج من الجدول \rightarrow

Subject :



$$0.4197 = P(k < Z < -0.18) \quad [b]$$

$$0.4286 - 0.4197 = 0.0089$$

- 2.37 جدول

$$45 < X < 62 \quad M=50 \quad \sigma=10 \quad \text{مطلوب اوسط } (x) \quad \therefore [x] 6.4$$

لازم احوال Z عنان اقدر اطلعنا الجواب

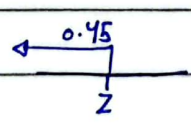
$$z_1 = \frac{45-50}{10} = -0.5 \quad \text{and} \quad z_2 = \frac{62-50}{10} = 1.2$$

$$0.8849 - 0.3085 = 0.5764 \quad \leftarrow \quad -0.5 < Z < 1.2 \quad \leftarrow$$

$$P(x > 362) \quad \text{مطلوب} \quad \sigma=50 \quad M=300 \quad \therefore [x] 6.5$$

$$\frac{362-300}{50} = 1.24$$

$$-0.8925 \quad \text{قائمة} \quad \leftarrow \quad (Z > 1.24) \quad *$$



$$45\% \text{ left} \quad [a] \quad \therefore [x] 6.6$$

مطلوب اوسط

$$-0.13 = \frac{x-40}{6} \rightarrow x = 39.22 \quad \therefore$$

$$Z < -0.13$$

جدول

$$|-0.14| = 0.86$$

$$\leftarrow 14\% \text{ right} \quad [b]$$

$$z = 1.08 \quad \text{نحدد بالجداول عنها ونجد انه}$$

$$1.08 = \frac{x-40}{6} \rightarrow x = 46.48$$

Subject :

$P(x < 2.3)$ مطلوب

$\sigma = 0.5$

$\mu = 3$

Ex 6.7

$z = \frac{2.3 - 3}{0.5} \rightarrow z = -1.4 \rightarrow (z < -1.4)$

$= 0.0808 *$

$P(720 < x < 834)$

$\sigma = 40$

$\mu = 800$

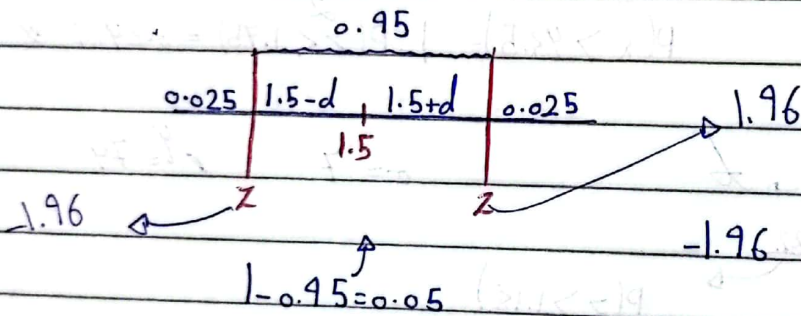
Ex 6.8

$z_1 = -0.55$

$z_2 = 0.85$

$\rightarrow P(-0.55 < z < 0.85)$

$* 0.8023 - 0.2912 = 0.5111$



Ex 6.10

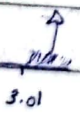
$-1.96 = \frac{1.5 - d - 1.5}{0.2}$

$-1.96 = \frac{(1.5 - d) - 1.5}{0.2}$

$d = 0.312 *$

scrapped المطلوب هو

$z_1 = \frac{2.99 - 3}{0.005} = -2.0$



$z_2 = \frac{3.01 - 3}{0.005} = 2.0$

$\infty = [3.01 - 2.99] \leftarrow 3.01 \pm 0.01$ Ex 6.9

$z_2 = \frac{2.99 - 3}{0.005} = -2.0$

الأسفل أخيراً إذا $z = -2$ $0.0228 + 0.0228 = 0.0456 *$

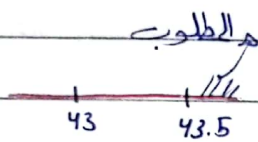
Subject :

$$x = 43 \quad \sigma = 2 \quad \mu = 40 \quad \text{Ex 6.11}$$

$$z = \frac{43 - 40}{2} = 1.5$$

$$P(x > 43) \quad \text{المسؤول طالب} \quad \text{exceeding 43}$$
$$1 - P(z < 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668 *$$

6.12 \leftarrow is measured to the nearest المسؤول طالب



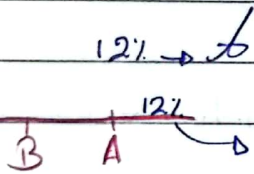
$$[42.5 - 43.4]$$

وبما أنه يتجاوز 43 يعني $x = 43.5$

$$x = 43.5 \quad \mu = 40 \quad \sigma = 2$$

$$\frac{43.5 - 40}{2} = 1.75$$

$$P(x > 43.5) = 1 - P(z < 1.75) = 0.0401 *$$



$$\sigma = 7 \quad \mu = 74 \quad 6.13$$

$$P(z > 1.18)$$

$$1.18 = \frac{x - 74}{7} \rightarrow x = 82.26$$

\therefore A : 82
 B : 83

Gamma and Exponential Distributions *

waiting Time \leftarrow

*** ما يلي سؤال نموذجي في الامتحان Gamma

$$f(x) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Subject:

Gamma Distribution *

" α ... "

* $\mu = \alpha \beta$

* $\sigma^2 = \alpha \beta^2$

* $\frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}$

[Scale parameter value] \leftarrow shape parameter alpha \leftarrow

average, mean \equiv scale parameter beta \leftarrow

Exponential Distribution *

Exponential \leftarrow Gamma \leftarrow $\alpha = 1$ \leftarrow $\beta = B$

" B ... exponential ... "

* $\frac{1}{B} e^{-x/B}$

* $\sigma^2 = B^2$

* $\mu = B$

Binomial ... $B = 5$ Ex 6.17

const (P)

$\int_0^\infty \frac{1}{5} e^{-x/5} dx = \frac{-5}{5} e^{-x/5} \Big|_0^\infty = 1$

constant P

$P(x > 2) = 1 - (x; 5, 0.2)$

...

$\mu = \frac{1}{\beta} \dots B = \frac{1}{5}$

Poisson ...

$\frac{1}{B} \equiv \mu \equiv \text{avg} = 5$ Ex 6.18

$P(x \leq 1) = \int_0^1 \frac{1}{\beta^2} x e^{-x/\beta}$

Gamma Function

S I G M A N O T E B O O K

Subject :

$$1 - P(x \leq 8)$$

أو $P(x > 8)$ المطلوب

$$\sigma = 1$$

$$\mu = 3.2$$

Ex 6.22

$$z = \frac{\ln(8) - 3.2}{1} = -1.12$$

$$0.1314 \text{ الجواب}$$

$$1 - 0.1314 = 0.8686 \text{ المطلوب}$$

$\ln(x)$ المطلوب

$$P(z) = 0.005$$

$$\sigma = 0.737$$

$$\mu = 5.149$$

Ex 6.23

↓

$$z = -1.65$$

$$-1.65 = \frac{\ln(x) - 5.149}{0.737} \rightarrow x = 51.26$$

Weibull Distribution *

أو الجواب المطلوب $F(x) = 1 - e^{-\alpha x^\beta}$

$$P(x < 8) \text{ المطلوب}$$

$$\beta = 2$$

$$\alpha = 0.01$$

Ex 6.24

$$1 - e^{-0.01 \times 8^2} = 1 - e^{-0.01 \times 64} = 0.473$$

$$\sigma^2 = 12$$

$$\mu = 6$$

Example

$$\textcircled{1} \dots \alpha = \frac{6}{\beta}$$

$$\mu = \alpha \beta = 6$$

Ex 6.2

$$\frac{6}{\beta} \times \beta^2 = 12$$

$$\sigma^2 = \alpha \beta^2 = 12$$

$$6\beta = 12 \rightarrow \beta = 2$$

$$\textcircled{2}$$

$$\alpha = \frac{6}{2} = 3$$

قانون (α)

$$\frac{1}{16} \int_0^8 x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$\leftarrow P(x > 12) \text{ لـ } b$$

subject :

Bionomial بسالنه كماله لزا $\beta = 4$ - Example

$$\frac{1}{4} \int_0^3 e^{-\frac{x}{4}} dx = \underbrace{0.5276}_{\text{const}} = P(x < 3)$$

(x < 6, 0.5276) $\frac{1}{4}$ جة كماله

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad *$$

* $\frac{1}{4}$ جة كماله *

Subject : Sheet Ch. 5

Variance σ	Mean, center, Exp. avg	Distribution	Name Distribution
$\sigma^2 = npq$	$\mu = np$	$b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$	Binomial
$\sigma^2 = \frac{N-n}{N-1} * n * \frac{k}{N} * (1 - \frac{k}{N})$	$\mu = \frac{nk}{N}$	$h(x; N, n, k) = \frac{\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	Hypogeometric
		$b^*(x; k, p) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}$	Negative-Bino
$\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$	$\mu = \frac{1}{p}$	$g(x; p) = p q^{x-1}$	Geometric
		$P(x; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$	Poisson
		$f(x, n) = 1/n$	Uniform

Subject :

Sheet - Ch "6"

$$* f(x; A, B) = \frac{1}{B - A}$$

$$* \sigma^2 = \frac{(B - A)^2}{12}$$

$$* \mu = \frac{A + B}{2}$$

∴ Uniform [1]

$$* z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad \therefore \text{Normal [2]}$$

↑
standard

$$* f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} \quad \therefore \text{Gamma [3]}$$

$$* \mu = \alpha \beta$$

$$* \sigma^2 = \alpha \beta^2$$

$$* f(x; \beta) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} \quad \therefore \text{Exponential [4]}$$

$$* \text{med} = \frac{1}{\beta}$$

↓
avg

$$* \mu = \beta$$

$$* \sigma^2 = \beta^2$$

$$* \sigma^2 = 2\nu \quad * \mu = \nu \quad \therefore \text{Chi-Squared [5]}$$

$$* \mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$* B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \quad \therefore \text{Beta [6]}$$

$$* \sigma^2 = \frac{\alpha \beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)}$$

$$* \mu = e^{\mu + \sigma^2/2}$$

$$* z = \frac{\ln(x) - \mu}{\sigma} \quad \therefore \text{Lognormal [7]}$$

$$* \sigma^2 = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$$

S I G M A N O T E B O O K

$$* \mu = \alpha^{-1/\beta} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

- Weibull [8]

$$* \sigma^2 = \alpha^{-2/\beta} \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right]^2 \right]$$

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x^\beta}$$

Cdf. Weibull