ELECTRICAL COMPUTER MECHATRONICS

تقدم لجنة ElCoM الاكاديمية

دفتر فيرست وسكند لمادة:

إحصاء وإحتمالات

من شرح:

د. محمد حماشا

جزيل الشكر للطالبة:

مرح أسود

CHapter 1

احصائيات (غير حقيقية)

مجتمع احصائي . population → sample

مثال → all Jordinan families — 100 families

مثلا averag = 816 — average = 716

ما بكونو متساويات لأنه sample بكون تقدير .

number of cycle to fail

Ex
Cauted + 20 % R.H → 1750
un cauted + 20 % R.H → 975
cauted + 80 % R.H → 1550
un cauted + 80 % R.H → 350

* لاحظنا انه (number of cycle to fail) متناسب طردي مع Cauted وعكسي مع R.H

* Measures الحسابات الاحصائية .
- Measures of location. (Measures of central tendancay)
- Measure of Variability (Measure of dispersion)

- measure of central tendancy → مقاييس النزعة المركزية .

- الوسط الحسابي mean = Average $= \frac{\Sigma x}{\text{number of } x}$
- الوسيط median → الرقم اللي بالوسط
- المنوال mode → القيمة الأكثر تكرارا

- measure of dispersion :- مقاييس التشتت

تقيس كم ال Deta بعيده عن ال Mean

- Standeral deviation
- varience
- Range → max − min → مثل :-

Ex ① (1, 2, 5, 8, 9) mean = 5, Range = 9 − 1 = 8

② (3, 4, 5, 6, 7) mean = 5, Range = 7 − 3 = 4

فـ اذا هاي اقرب مثال ف مقياس التشتت اقل .

Five Apple

measure	pupulation	sample
size	N	n
mean	m	$\bar{x}$
median	median	median
mode	mode	mode
varience	σ^2	S^2
S.D	σ	S
Range	R	R

✱ $S.D = \sqrt{\text{varience}} \Longrightarrow \text{varience} = (S.D)^2$

Ex :- sample (4, 5, 10, 16, 28, 5, 11, 5, 22, 19)

(1) Find the mean :-

لأنه sample ← $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{\text{number of } x} = \frac{4+5+10+\cdots+19}{10} = \frac{125}{10} = 12.5$

(2) $R = \max - \min = 28 - 4 = 24$

(3) $\text{varience} = s^2 = \frac{\sum_{x=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{(4-12.5)^2 + (5-12.5)^2 + \cdots}{10-1} = 70.5$

الرقم الاول

(4) $S.D = \sqrt{\text{varience}} = \sqrt{70.5} = 8.39$

لو السؤال (pupulation) بدل منه sample فقط تتغير الرموز اللي بالجدول
بالإضافة الى (varience) ← بال sample. $s^2 = \frac{\sum_{x=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$
بال pupulation $\sigma^2 = \frac{\sum^{n} (x_i - m)^2}{N}$

(5) Median → هو الرقم اللي بالنص بس لازم الترتيب منذ الصغير.

(4, 5, 5, 5, 10, 11, 16, 19, 22, 28)

اذا كان العدد

odd → بوخذ الصيغة اللي بالنص

even → $\frac{\text{الرقمين اللي بالنص}}{2} = \frac{10+11}{2} = \frac{21}{2} = 10.5$

(6) mode :- القيمة الأكثر تكرارًا

mode $= 5$

EX $5, 11, 17, 20, 22 \rightarrow$ No mode

EX $5, 11, 17, 11, 20, 22, 17 \rightarrow$ mode $= 11, 17$

* Trimmed mean

10 % Trimmed mean

Data $\rightarrow$ $7, 8, 9, 9, 11, 13, 17, 18, 19, 21$

$n = 10 \Rightarrow 10\% \, n = \frac{10}{100} \times 10 = 1$ نحذف (1) من الاول وواحد من الآخر.

$\therefore$ 10 % Trimmed mean $= \frac{8 + 9 + \cdots + 18 + 19}{8}$

لو كان 20 % Trimmed mean

$\frac{20}{100} \times 10 = 2$ نحذف (2) من الاول و (2) من الآخر

$\therefore$ 20 % Trimmed mean $= \frac{9 + 9 + \cdots + 17 + 18}{6}$

EX $5, 6, 7.5, 7, 8$

20 % Trimmed mean $= \frac{20}{100} \times 5 = 1$ اذاً نحذف (1) من الاول و (1) من الآخر

$\therefore$ 20 % Trimmed mean $= \frac{6 + 7.5 + 7}{3}$

Scanned with CamScanner

* summery statistics

→ measure of C.T (central tendancy)

→ measure of dispersion مثل (Range , varience , . . .)

→ measure of shap

* discriptive statictistics احصاء وصفي :

→ scatter plat

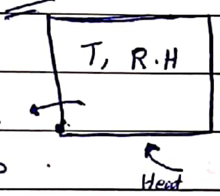
→ stem and leef

→ histogroun :

→ bux plot

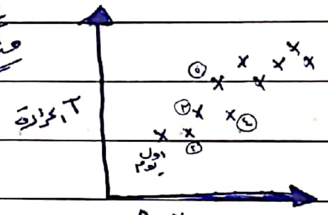
* 1) مبعثر scatter plat

مثال



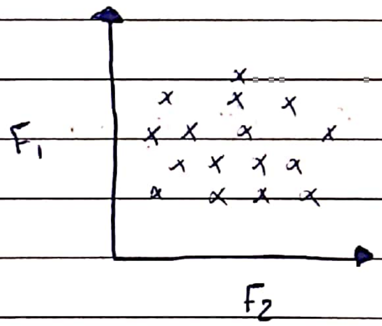
لما نقيس درجة الحرارة راح نكتشف انه درجة الحرارة بتزيد بس R.H ثابتة

مثال



العلاقة العامة

مفهوم General trend بين the First factor and secand factor



(un dependant Factors)

→ لما يكون عندي 2 Factor وما اقدر اطلع منهم

في trend

2) stem and leaf :-

مثال battery life

2.2 , 4.1 , 3.5 , 4.5 , 3.2 , 3.7 , 3.0 , 2.6

3.4 , 1.6 , 3.1 , 3.3 , 3.8 , 3.1 , 4.7 , 3.7

2.5 , 4.3 , 3.4 , 3.6 , 2.9 , 3.3 , 3.9 , 3.1

3.3 , 3.1 , 3.7 , 4.4 , 3.2 , 4.1 , 1.9 , 3.4

4.7 , 3.8 , 3.2 , 2.6 , 3.9 , 3.0 , 4.2 , 3.5

stem — leaf

الموتقدر انا اعمل الـ design اللي بدي اياه ما بفرق

طريقة (1) للتمثيل

stem	leaf
1	6 9
2	2 5 6 6 9
3	00 1111 222 333 444 55 6 7 7 7 88 99
4	11 2 3 4 5 7 7

برتب من الصغير

طريقة ثانية

	stem	leaf
	1.	6 9
(2.0 → 2.4) ←	2*	2
(2.5 → 2.9) ←	2.	5669
	3*	00 1111 222 333 444
	3.	55 6 777 88 99
	4*	11 2 3 4
	4.	5 77

(.,0 / .,1 / .,2 / .,3 / .,4) → *

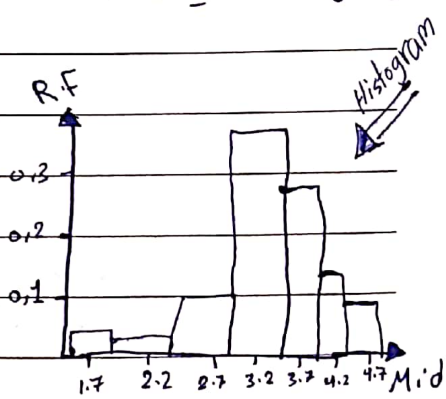
(.,5 / .,6 / .,7 / .,8 / .,9) → .

3) Histogram :- (Frequency table) $\xrightarrow{draw}$ histogram

جدول التكرارات

مثال (نفس المثال اللي فوق)

I	Mid point (مجموع الرقمين / 2)	Frequency	Relativ . F
(1.5 – 1.9)	1.7	2	2/40 = 0.05
(2 – 2.4)	2.2	1	1/40 = 0,025
(2.5 – 2.9)	2.7	4	4/40 = 0,1
(3 – 3.4)	3.2	15	15/40 = 0.375
(3.5 – 3.9)	3.7	10	10/40 = 0,25
(4 – 4.4)	4.2	5	5/40 = 0.125
(4.5 – 4.9)	4.7	3	3/40 = 0.075
		40	



لو هاد الرقم مش حالي اوجديه من ورقة المثال يعني 3 = 40 × 0.075

يعني لو في رقم مش موجود بطلعه منه 1- (مجموع الباقي)

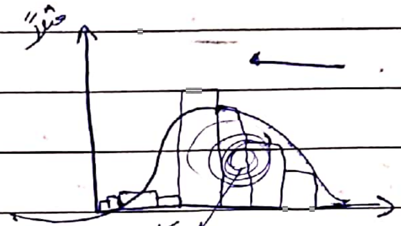
بالارقام الـ R.F المجموع الجواب يكون 1

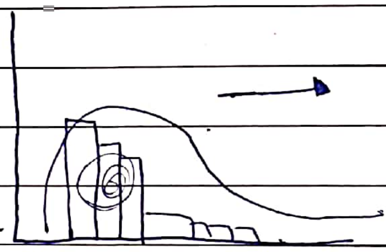
$$\text{Mean of Histogram} = \frac{\sum Mid * f}{\sum f} \quad \overset{أو}{\equiv} \quad \sum Mid * R.F$$

يعني بالمثال السابقه

$$= \frac{(1.7 \times 2) + (2.2 \times 1) + (2.7 \times 4) + (3.2 \times 15) + \cdots + (4.7 \times 3)}{40}$$

$$= 3.4125$$





(4) Box plot :-

(Qurtile, Q_1, Q_2, Q_3) — الارباع

Q_2 → median

EX

Data (22, 24, 27 | 29, 30, 30 | 31, 31, 32, 35, 35, 45)

(1) 22, (2) 24, (3) 27, (4) 29, (5) 30, (6) 30, (7) 31, (8) 31, (9) 32, (10) 35, (11) 35, (12) 45

موقع Q_1 — location Q_2

عددهم $n = 12$

$$\text{location } Q_1 = (n+1) * .125$$

$$(13 \times .125) = 3.25$$

value (inter polestion) :-

value	location
27 →	3
29 →	4
x →	3.25

هاد اللي بدي اياه

$$\frac{x - 27}{3.25 - 3} = \frac{29 - 27}{4 - 3}$$

$$x - 27 = .25 \times 2$$

$$\boxed{x = 27.5}$$

value Q_2 = median $= \frac{30 + 31}{2} = 30.5$

location $Q_2 = (n+1) \times .50 = 6.5$

location $Q_3 = (n+1) * 0.75 = 9.75$

يعني بينه التاسع والعاشر واقرب للعاشر

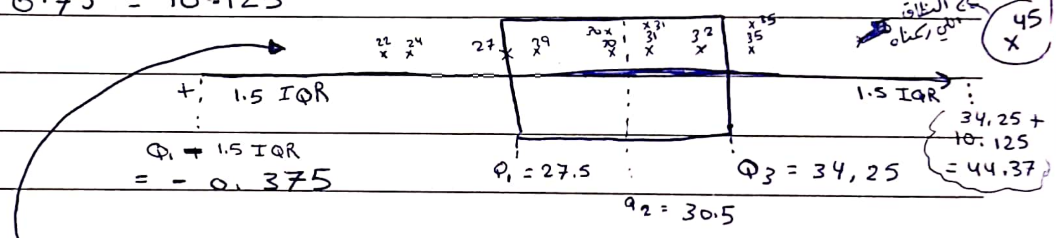
value : $32 + 0.75\,(35 - 32) = 34.25$

* IQR → inter quartile range

$= Q_3 - Q_2$

$34.25 - 27.5 = 6.75$

* $1.5\ IQR = 1.5 \times 6.75 = 10.125$



وآخر خطوة نرسم العلم وين مكان ال Deta

* percentile :

Ex: 2, 3, 4, 5, 5, 7, 10

* 68 % percentile ??

location $= (n+1) \times 68\% = 8 \times .68 = 5.44$

value $= 5 + 0.44\,(7 - 5) = 5.88$

الرقم الاول — location 5, الرقم اللي بعد الفاصلة, location 6

Chapter 2 :-

فرصة حدوث الاشياء

probability : الاحتمالات

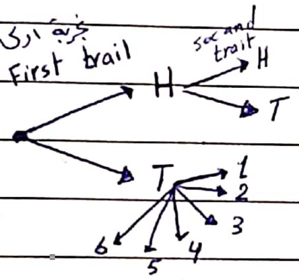
معناه العينه
- sample space : المجموعة التي تحتوي كل العناصر الممكنة من تجربة احصائية .

Ex :- قطعة نقد coins → H صورة, T كتابة

- اذا رمينا قطعة نقد تكون الاحتمالات صورة او كتابة .

Ex :- حجر نرد die → 1, 2, 3, 4, 5, 6

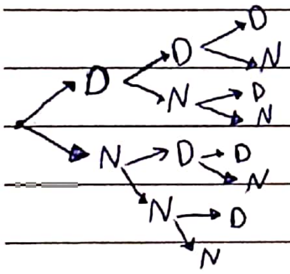
Ex (2:2) :- تجربة مرمي فيها قطعة نقد وبعد ما نرميها اذا طلعت (H) مرمي قطعة النقد مرة أخرى واذا طلعت (T) مرمي حجر نرد. ما هو sample space



$S = (HH, HT, T1, T2, T3, T4, T5, T6)$

Ex (2:3) انه عنا خط انتاج يصنع غرض معين ممكن يكون صالح او تالف . بدي اسحب ٣ عينات شو الاحتمالات الممكنة (N = Non Defectiv / D = defective)

صالح تالف



$S = (DDD, DDN, DND, DNN, NDD, NDN, NND, NNN)$

- الطريقة الاولى للتعبير عن space هي كتابة كل العناصر .

الطريقة الثانية اذا كانت العناصر كبيرة او اذا كانت cont بستخدم role method مثل

كل الدول المليونية

$S = (X \mid X$ is a city with a population over 1 million$)$

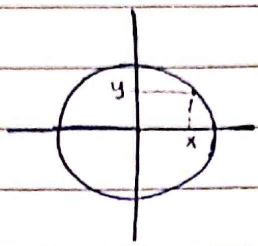
لا نكتب بهاي الطريقة لانه صعب دي العدد
كل الدول

مثلاً

السؤال طالب كل النقاط اللي موجودة على الدائرة بحيث انه 2 = radius

يعني ما هو cont يعني في عدد لانهائي على الدائرة.

$S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$



* Events : → جزء معين من space

- نرجع على Ex (2-3) ومثلاً لو يطلب منا العناصر اللي بتحتوي على 2 او 3 (D)

∴ B = (DDN, DND, NDD, DDD) ← event

Ex (2.4) → $S = (t \mid t \geq 0)$

السؤال عن (t) حيث انه (t) عدد السنوات اللي بيعيشها جهاز معين فممكن يكون عندي مثلاً

event (A) → $A = \{t \mid 0 \leq t < 5\}$

* The complement → (مجموعة مكملة) وهي التي تكمل ال event لل space

Ex $S = \{H, T\}$

$A = \{H\}$ اذاً → $A' = \{T\}$ complement

Ex $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

event $A = \{1, 2\}$ → $A' = \{3, 4, 5, 6\}$

Ex : $S = \{h \mid 0 < h < 9\}$ h: ارتفاع الماء في الخزان.

هنا احتمال ان يكون الماء اقل منه 6

$A = \{h \mid 0 < h < 6\}$ اذاً $A' = \{h \mid 6 \leq h < 9\}$

Ex (2.6) :- $S = $ (book, cell phone, mp3, paper, laptop, stationary)

let $A = $ (book, laptop, paper, stationary)

∴ $A' = $ (cell phone, mp3)

* The intersection → 2 events منطقة التقاطع بين

مثل $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A = \{2,4,6\}$ even / $B = \{4,6,5\}$ more than 3

∴ inter section between them ⇒ $A \cap B = \{4,6\}$

- بستخدم (inter section) لما تكون عندي (and) ← هاي معناتها تقاطع
وأيضًا لا بدّ اثنين يحققوا شرطين مع بعض

Ex (2.7) :- $S =$ Class room كل الطلاب الموجودين بال

$E =$ electric eng $F =$ famele student

∴ $E \cap F$ → يعني كل الطالبات اللي هندسة كهربا

Ex (2.8) let $V = \{a,e,i,o,u\}$ and $C = \{l,r,s,t\}$

∴ $V \cap C = \phi = \{\ \}$

وبيسمى mutually exclusive لما ما يكون فيه عناصر مشتركة.

* The union الاتحاد ($\cup$) (2 event كل العناصر الموجودة بال)

مثل $A = (2,4,6)$ $B = (4,5,6)$

$A \cup B = (2,4,5,6)$ من دون تكرار رقم

- بستخدم (union) لما يكون عندي (or) ← هاي معناتها اتحاد.

Ex (2.10) :- Let $A = (a,b,c)$ and $B = (b,c,d,e)$, then

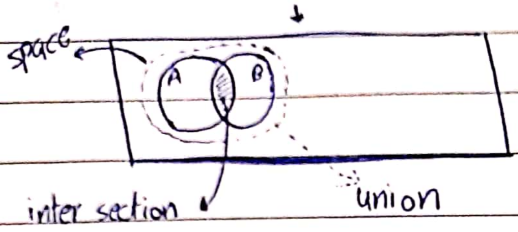
$A \cup B = (a,b,c,d,e)$

Ex (2.12) :- if $M = (x \mid 3 < x < 9)$ and $N = (y \mid 5 < y < 12)$

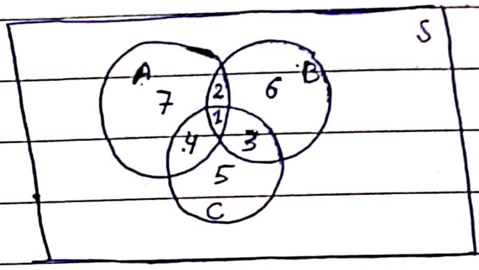
(inter section) → $M \cap N$ $(z \mid 5 < z < 9)$

(union) → $M \cup N$ $(z \mid 3 < z < 12)$

* (venn diagrams) → طريقة تمثل فيها space and events



Ex



$A \cup C = (1, 2, 3, 4, 5, 7)$

complement ① $B' \cap A = (4, 7)$

$A \cap B \cap C = 1$

$(A \cup B) \cap C' = (1, 2, 3, 4, 6, 7) \cap C'$

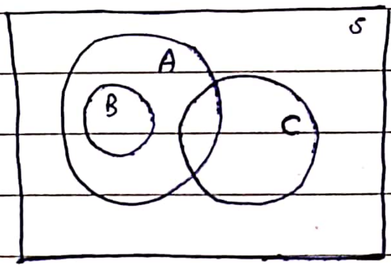
$= 2, 6, 7$

$C = 1, 3, 4, 5$ | $B = 1, 2, 3, 6$

$C' = 2, 6, 7$ | $B' = 4, 5, 7$

Ex

في هاد Ex event B مجموعة جزئية من event A



$A \cup B = A$

$A \cap B = B$

* Several results :-

1. $A \cap \Phi = \Phi$
2. $A \cup \Phi = A$
3. $A \cap A' = \Phi$
4. $A \cup A' = S$
5. $S' = \Phi$
6. $\Phi' = S$
7. $(A')' = A$
8. $(A \cap B)' = A' \cup B'$
9. $(A \cup B)' = A' \cap B'$

* counting sample points

طرق العد
بتساعدنا لنعرف عدد ال sample
وعدد ال events

$S = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \dots, u_{10}\}$

- اذا كان عندي احتمال كل عنصر بال space نفس الشي
يعني احتمال انه يطلع عندي العنصر الاول قبل احتمال العنصر الثاني هادا الشي بسميه (equaly likely)

$A = \{u_1, u_2, u_3\}$

يعني شو احتمال ال A

$P(A) = \dfrac{\text{عدد ال (A)}}{\text{عدد ال space}} = \dfrac{3}{10} = 0.3$ → هاي rule فقط بال equaly likely

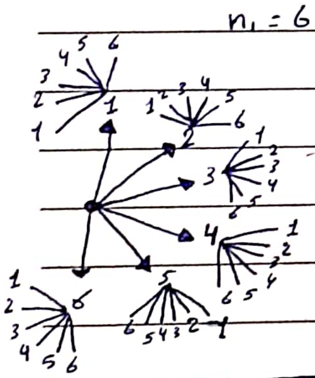
Rule 1 :- If an 2 operation n_1, n_2, then the two operation can be performed together in $(n_1 n_2)$ ways.

مثال: 2 die نرد

operation 1 ← $n_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$ operation (2) $n_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$

$n_1 = 6$ / $n_2 = 6$ → $\therefore n_1 n_2 = 6 \times 6 = 36$

واذا بدي اعرف واتأكد من وين اجت 36



EX (2.14) :- كم طريقة بقدر اعمّر فيها البيت من شكل الموجود بالسؤال

$4 \times 3 = 12$

Exterior style, Floor plan

EX (2.15)

نادي طلابي في 22 عضو بدهم يختارو رئيس للنادي وامين سر للنادي بكم طريقة بقدرو يختاروهم

اي اختار الرئيس ← $n_1 = 22$

اي اختار امين السر ← $n_2 = \cancel{22}\ 21$ لانه في واحد صار الرئيس

$\therefore 22 \times 21 = 462$ عدد الطرق اللي بقدر اختارهم فيها

فهم Ex (2.16)

- السؤال بحكي انه سام بدو يجمع كمبيوتر وبده

Chips from 2 brands / a hard drive from 4 / memory from three an accessory bundle from five local stores.

$\therefore n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4 = 2 \times 4 \times 3 \times 5 = 120$ different ways to order the parts.

Ex (2.17):

- كم عدد ممكن نكون من ٤ خانات زوجية من (0,1,2,5,6,9)

اذا كل وحدة من هاي الارقام بقدر استخدمها مرة وحدة.

sol: مفاتو بقدر استخدم فقط even (0,2,6) بس ال (0) لما استخدمه راح يصفى الرقم معي من ٣ خانات

اول شي بجرب ع الاطراف بعدين الي بالنص

الاحتمال الاول: $4 \times 4 \times 3 \times 2$ خيارين $= 96$

الاحتمال الثاني: 5 ارقام $\times 4$ ارقام $\times 3$ ارقام $\times 1$ خيار واحد $= 60$

156 طريقة.

طريقة الشجرة

خيار البلش

٣ خيارات لانه صفر ما بجوز | ٥ خيارات | ٤ خيارات | لازم احط الشجرة عشان اعرف

هون يعني ٣ ارقام even اذا صفر خانتين

بقدرش اكتب ال (0) بصير منه ٣ منازل لهيك بس خيارية فقط (2,6)

even (2) خيارين:

e → 1 → 0 = 0

e → 2 → 3 → e.e.o → 1 = 12

o → 3 → 2 → e.o.e → 1 = 12

o → 2 → e.o.o → 2 = 24

odd (3):

e → 3 → 2 → o.e.e → 1 = 18

o → 2 → o.e.o → 2 = 36

o → 2 → 3 → o.o.e → 2 = 36

1 → o.o.o → 3 = 18

156

القاعدة الرئيسية له
$(n!)$

الترتيب مهم

* Apermutation : التباديل

Ex a,b,c,d

The possible permutation :-

4 خيارات	3	2	1

زي كأنه طالب

$4\times3\times2\times1 = 24$ $n!$

مثال Ex لو عندي (a,b,c,d) وبدي عدد الخيارات الممكنة لأكونها من حرفين فقط

بالسؤال = 2

rule - permutation of n distinct objects taken (r) at a time

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \Rightarrow \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4\times3\times\cancel{2\times1}}{\cancel{2\times1}} = 12$$

جواب السؤال

EX (2.18) :- السؤال انه بدنا نعطي 3 جوائز ل 3 طلاب من اصل 25 طالب

$25\times24\times23 = 13800$ - الحل بدون قانون :

- الحل ع القانون :

$${}_{25}P_3 = \frac{25!}{(25-3)!} = \frac{25!}{22!} = 25\times24\times23 = 13800$$

Ex (2.19):- بدنا نختار رئيس وامين سر من نادي طلابي مكون من 50 طالب :-
كم خيار موجود عندي اذا :

يعني اي طالب ممكن يكون رئيس واي طالب ممكن يكون امين سر.

1) there are no restrictions :-

$50\times49 = 2450 \longrightarrow \frac{50!}{(50-2)!} = 50\times49 = 2450$

يعني اذا طالب بدو يكون رئيس وما بدو يكون امين سر.

2) A will serve only if he is president →

اذا كان A president $= 1\times49 = 49$ (امين سر)

الاخر A not president $49\times48 = 2401$

يعني من طالبين بيحكو اما بشتغلو مع بعض او ما بشتغلو

3) B and C will serve together or not at all

B and C serve → $2 \times 1 = 2$

B and C not serve → $48 \times 47 = 2258$

يعني طالبين ما بدهم يشتغلو مع بعض .

4) D and E will not serve together :-

D serve → $1 \times 48 = 48$

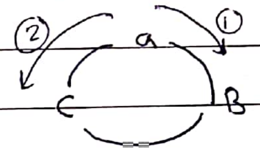
E serve → $1 \times 48 = 48$

D and E not serve → $47 \times 46 = 2448$

* Theorem :- The number of permutations of n objects arranged in a circle is $(n-1)!$

يعني العناصر مربوطين بالدائرة .

مثل (a,b,c)



→ abc
acb

في هاي الحالة ما بيذكر خيار غير abc او acb

القاعدة لو بدي احل ∴ $(n-1)! = (3-1)! = 2! = 2$

حالات تكون التباديل مقسمة لقروبات

* Theorem :- The number of distinct permutation of n things of which n_1, are of one kind, n_2 of a second kind, ..., n_k of a kith kind is $\dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}$

Ex (2.20) :-

فرقة كرة قدم ١٠ لاعبين في واحد منهم (Fresh man) سنة اولى
و ٢ (sopho more) سنة ثانية و ٤ Juniour سنة ثالثة و ٣ seniors خريجين

اذا بدنا اياهم يصفو ورا بعض بالسرية كيف حيترتبو ؟؟
كم طريقة ؟؟

Sol :- نطبق القاعدة

$\dfrac{n!}{1!\ 2!\ 3!\ 4!} = 12600$ طريقة

لو في هادا السؤال مقسم لقروبات يعني ما بيهمني اللي هذا السنوات ذكر مين قبل مين المهم ترتيب القروبات نفسهم

لحصيلي كل ع القانون .

لما يكون عنا قروبين فقط بهاي الحالة نقدر اكتب القانون بطريقة اخرى مثل

Ex :- 5 balls (4 Red , 1 White)

The number of partitions

$\binom{5}{4,1} = \frac{5!}{4!\,1!} = 5$ طرق

* Theorem :- The number of ways of partitioning a set of n objects into r cells with n_1 elements in the first cell, n_2 element in the second and so forth, is :

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!}$$

يعني لما يكون عنا عدد مقسم على قروبات نستخدم هاد القانون

Ex (2.21) :

عندي ٧ طلاب مسافرين وبدهم ينزلو لفندق فيه ٣ غرف.

الغرفة الاولى / الغرفة الثانية / الغرفة الثالثة.

سرير

$$\binom{7}{2,2,3} = \frac{7!}{3!\,2!\,2!} = 210$$

The Combination — الترتيب غير مهم — التوافيق

Theorem :- The number of combination of n distinct objects taken r at a time is :- $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

مثال

a, b, c, d بدي كل ٢ يكونو مع بعض

(ab , ac , ad , bc , bd , cd) هلا هون ما بهمني الترتيب يعني

هون ٦ قروبات لو اقلبهم ما راح يصيرو ١٢ لأنه الترتيب مو مهم تظله ٦ وبس

(ab = ba)

ولو طبقنا القانون ع هاد المثال.

$$\frac{4!}{2!\,2!} = \frac{24}{4} = 6$$

EX (2.22) :- → (10 arcade) + (5 sports games)

بدو يختار من هاي ↓ 3 ↓ ومنه هاي 2

sol $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$ → The number of ways of selecting 3 cartridge from 10

$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$ → The number of ways of selecting 2 cartridges from 5

* probability of an Event :-

مثل. die / $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A = \{1\}$ → احتمالية انه يطلع 1 هي $\frac{1}{6}$

$\frac{\text{عدد ال event}}{\text{عدد ال space}}$ رحل الجواب ... لانه equaly likely يعني فرصة حدوث العنصر الاول مثل الثاني مثل

هاي معناها فرصة حدوث ال space $P(S) = 1$ يعني دائماً 100% / $P(\Phi) = 0$

$$\underset{(\Phi)}{0} \leq P(A) \leq \underset{(S)}{1}$$

فرصة حدوث اي الحدث او اي شي

ماشي تقاطع بيناتهم

* If A_1, A_2, A_3 (mutually exclusive), then

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$

مثال die $\{1,2,3,4,5,6\}$. $A = \{1,3,5\}$ $B = \{2,4,6\}$

ماشي تقاطع بيناتهم.

$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} = 1$ لانه هو space اصلاً

EX (2.24) حجر نرد رميت مرتين شو احتمالية انه يكون عالاقل ($H \leftarrow 1$)

$S = (HH, HT, TH, TT)$

معناتو ال event لدو يكون $A = (HH, HT, TH)$ → $P(A) = \frac{3}{4}$

EX (2.25)

حجر نرد (غير طبيعي) واحتمالية انه يطلع عدد زوجي ضعف احتمالية العدد الفردي

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$

$p(1) = p(3) = p(5)$

$p(2) = p(4) = p(6) = 2\,p(1) = 2\,p(3) = 2p(5)$

السؤال حاكي انها اقل منه 3

$E = \{1,2,3\}$

$p(E) = p(1) + p(2) + p(3)$

بدي اطلعهم من خلال $p(S)$

$p(S) = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1$

$p(1) + 2p(1) + p(1) + 2p(1) + p(1) + 2p(1)$

اكتبهم كلهم بدلالة ال (1)

$9\,p(1) = 1$ $\quad p(1) = \frac{1}{9} = p(3) = p(5)$

$p(2) = 2 * \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$

$\therefore p(E) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$

EX (2.26):-

بالرجوع ل EX (2.25)

$A = \text{even} = \{2,4,6\}$

يعني بتقسم على 3 devisible by 3 $B = \{3,6\}$

Find $p(A \cup B) \rightarrow A \cup B = \{2,3,4,6\}$

even odd even.

$\frac{2}{9} = p(\text{even})$ من السؤال الماضي

$\frac{1}{9} = p(\text{odd})$

$\therefore p(A \cup B) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$

Find $p(A \cap B) \rightarrow (A \cap B) = 6 \rightarrow$ even

$p(A \cap B) = \frac{2}{9}$

Rule. If an experiment can result in any one of N different equally likely outcomes, and if exactly n of these outcomes correspond to event A, then the probability of event A is

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

معناه انه لما يكون عندي مجموعة من الارقام ٦ واحتمالية كل رقم
نفس الرقم الثاني من هاي الحالة بقسم عدد الارقام اللي بال event على space

مثال

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{2, 3\}$

احتمالية انه يطلع 1 = احتمالية 2 = 3 = 4

$$\therefore P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

EX (2.27) :

25 → Industrial / 10 → Mechanical / 10 → electrical

8 → Civil

(1) احتمال انه يكون صناعي.

$$P(I) = \frac{25}{53}$$

53 ← المجموع كامل

(2) احتمال انه اختار طالب مدني او كهربا.

$$P(C \cup e) = P(C) + P(e) = \frac{8}{53} + \frac{10}{53} = \frac{18}{53}$$

EX (2.28) :-

شخص بيلعب بشدة ومعه ٥ اوراق شو احتمالية انه يكون معه ٢ قص (aces) و ٣ اولاد (Jacks).

- The number of ways (2 aces from 4 cards)

لانه بالشدة في ٤ انواع.

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$$

- The number of ways (3 Jack from 4 cards)

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\,1!} = 4$$

- The multiplication rule → $n = n_1 n_2 = 4 \times 6 = 24$ Event

هلا لازم اوجد الطرق لل space كامل

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!\,47!} = 2598960$$

يعني الشدة كاملة.

احتمال القص ٢ و ٣ اولاد بالبداية ← $P(C) = \frac{24 \text{ event}}{2598960 \text{ space}} = 0.9 \times 10^{-5}$

يعني الاحتمال صغير

* **Additive Rules :-** لما يكون في عندي تقاطع بين 2event

then ∴ $$\boxed{P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)}$$

- لو ما في تقاطع بين event ما بحط $P(A\cap B)$ اللي بالقانون

* If $A_1, A_2, \dots A_n$ are mutually $\underbrace{\text{exclusive}}_{}$ (ما في تقاطع), then

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

* If $A_1, A_2, \dots A_n$ is a partition of sample space (S)

$$\therefore P(A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = P(S) = 1$$

* Theorem :-

For three events $A, B,$ and C

$$P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(A\cap C) + P(A\cap B\cap C).$$

Ex (2.30)

or (U)

" السؤال انه رمينا حجرين نرد شو احتمال يطلع 7 $\boxed{\text{او}}$ 11 "

die — die → $6\times 6 = 36$ تقابل

(total = 7) →

$$\begin{bmatrix} 1 & - & 6 \\ 2 & - & 5 \\ 3 & - & 4 \\ 4 & - & 3 \\ 5 & - & 2 \\ 6 & - & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \underset{\text{getting total}=7}{P(A)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$\boxed{\text{total} = 11}$

$$\begin{bmatrix} 5 & - & 6 \\ 6 & - & 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \underset{\text{getting total}=11}{P(B)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$\therefore P(A\cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{2}{9}$$

EX (2.31) :-

واحد بدو يشتري سيارة جديده احتمال انه يشتريها .

اخضر (0.09) / ابيض (0.15) / احمر (0.21) / ازرق (0.23)

ما احتمال اذا اشترى سياره يشتريها بوحدة من هدول الالوان (يعني OR)

طبعًا اكيد مو حاشتري سياره معها لونين يعني ما في تقاطع

$P(G \cup W \cup R \cup B) = P(G) + P(W) + P(R) + P(B)$

$= 0.09 + 0.15 + 0.21 + 0.23 = 0.68$

Theorem :- $P(A) + P(A') = 1$

لأنه $P(A) + P(A') = P(S) = 1$

Ex (2.32)

انه اذا كان عنا ميكانيكي سيارات احتمال يصلح

(٣ سيارات ← ١٢ ,٠) / (٤ ← ١٩ ,٠) / (٥ ← ٢٨ ,٠) / ٦ ← (٢٤ ,٠) / (٧ ← ١٠ ,٠) / (٨ ← ٠٧ ,٠)

# of served car

a	3
b	4
c	5
d	6
e	7
f	8

$P(c \cup d \cup e \cup f) = P(c) + P(d) + P(e) + P(f)$

$= .28 + .24 + 0.10 + .107 = 0.69$

لو بعد ما طلعنا الجواب لو سألنا شو احتمال انه يصلح اقل من ٥ سيارات .

$\therefore 1 - 0.69 = 0.31$

EX (2.33) :- انه في computer cable طوله 2000 ممكن يقل (10 ml) او يزيد (10 ml) اذا زاد او قل اكثر من ١٠ ما بنباع

specification (1990 - 2010) $\longrightarrow P(1990 < X < 2010) = (0.99)$

$P(X < 1990) = P(X > 2010)$

شو احتمال الصغيرة كبير يعني اكبر من المواصفات

① not meet specification (لا يطابق المواصفات) $= 1 - 0.99 = 0.01$

لأنه
$\left[\begin{array}{l} .005 = \frac{.01}{2} = \text{(too large) احتمال انها تكون} \\ .005 = \frac{.01}{2} = \text{(small) واحتمال انها تكون} \end{array}\right.$

$P(X < 1990) + P(X > 2010) = 0.01$

(2)

شو احتمالية انها تكون اكبر من $\underline{1990}$

① $(1990 < X < 2010) \rightarrow P(1990 < X < 2010) = 0.99$

② $(X > 2010) \rightarrow P(X > 2010) = 0.005$

$= 0.99 + 0.005$

$= 0.995$

~~* probability~~

* conditional probability . الاحتمال المشروط

مثال

A: getting A^+ in stat class

B: having gpa more than or equal 3.5 يعني تراكمي

$P(A) = 0.07$ ممكن تكون

يعني احتمال ان الطالب يحصل على A^+ بشرط معدل امتياز — $P(A/B) \overset{\text{ممكن}}{=} 0.40$ شرط

Deff. $P(B\backslash A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

اللي بالمقام هي نفسها الشرط

Ex (2.34) :- في المطار احتمالية ان الطياره تغادر في الوقت المحدد $P(D) = 0.83$ واحتمالية ان الطياره توصل بوقتها هي $P(A) = 0.82$, احتمالية انه تغادر وتوصل بالوقت المناسب $P(D\cap A) = 0.78$

Find:-

① $P(A/D) \overset{\text{given that}}{=} \dfrac{P(A\cap D)}{P(D)} = \dfrac{0.78}{0.83} = 0.94$

② $P(D/A) = \dfrac{P(A\cap D)}{P(A)} = \dfrac{0.78}{0.82}$

(3) what is the probability that the air plan arrive on time give that , it is not depertion time.

شرط (give that) — not يعني D'

$P(A/D') = \dfrac{P(A\cap D')}{P(D')} = \dfrac{P(A) - P(A\cap D)}{1 - 0.83} = \dfrac{0.82 - 0.78}{0.17} = 0.24$

Ex (2.35) :

صناعة نوع محدد من القماش اللي ممكن يكون تالف بدرجتين
وهما الطول او طريقة النسج

$P(L) = 10\%$ ← من المنتجات تالفه بالطول (٪١٠)

$P(T) = 5\%$ ← بطريقة النسج " " " (٪٥)

$P(T \cap L) = 8\%$ ← بالطول وطريقة النسج " " " (٪٨)

Find :-

$$P(T/L) = \frac{P(T \cap L)}{P(L)} = \frac{8\%}{10\%} = \frac{0.008}{0.1} = 0.08$$

الاستقلال ← Independent Events

عشان اتأكد انهم مستقلين عن بعض لازم تحقق الشرط

$$P(A/B) = P(A).$$

مثال

A: pass stat course

B: having ~~a~~ a car $\Rightarrow P(A/B) \overset{\text{اذا}}{=} P(A)$

لو هلا حدوث الشيئين ما
الهم دخل ببعض ~~هم~~ واذا
حنكتشف انه $= P(A)$

- هلا اذا كان الهم دخل ببعض

$$\therefore P(A/B) \neq P(A)$$

$$\underbrace{P(A/B)}_{=P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \rightarrow \text{في حال كانو مستقلين}$$

في حال كانو Independent.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) \rightarrow$$ ~~not indep~~ ما كانو مستقلين.

Ex (2.36)

20 Fuses

15 good — 5 defective

اذا سحبنا ٢ من دون ارجاع , والاحتمال انه ٢ defective ←

الاول defective — الثاني def

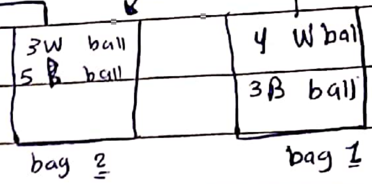
$$P(D_1) \times P(D_2/D_1) = \frac{5}{20} \times \frac{4}{19} = \frac{1}{19}$$

4 ← لانه سحبنا ① def

19 ← العدد الكلي نقص واحد

سحبنا كانت كرة من bag(2) شو احتمال ايضا تكون سودة

سحبنا كرة عشوائيا



Ex (2.37):-

الثانية Black

$$P(B_2) = P(B_2 \cap B_1) + P(B_2 \cap W_1)$$

$$= P(B_1) \times P(B_2/B_1) + P(W_1) \times P(B_2/W_1)$$

اذا سحبنا Black

$$\frac{3}{7} \times \frac{6}{9} + \frac{4}{7} \times \frac{5}{9} = \frac{38}{63}$$

Ex (2.38):-

A = fire engine in available

B = ambulance is available.

$P(A) = 0.98$, $P(B) = 0.92$

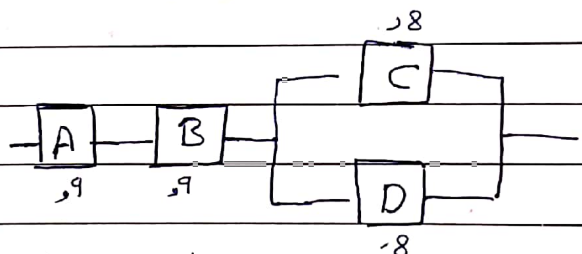
صار حريق بالمنزل شو احتمالية انهم يكونو موجودين.

اذا كانو Independent ← بعني ما بعتمدو ع بعض.

$$\therefore P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$= 0.98 \times 0.92 = 0.9016$$

Ex (2.39)



a

ما احتمالية انه هاي system work

تشتغل Independent

$$P(\text{system works}) = P(A \cap B \cap [C \cup D])$$

$$= P(A) \times P(B) \times P(C \cup D)$$

$$= P(C) + P(D) - \underbrace{P(C \cap D)}_{P(C) \times P(D)}$$

$$\therefore 0.9 \times 0.9 \times (0.8 + 0.8 - (0.8 \times 0.8))$$

$$= 0.7776$$

b

اذا كانت (C) ما تشتغل

$$P(C' / \text{system works}) = \frac{P(C' \cap \text{system works})}{P(\text{system work})} = \frac{P(A \cap B \cap C' \cap D)}{} = \frac{0.9 \times 0.9 \times 0.2 \times 0.8}{0.7776}$$

Theorem :-

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B/A) \times P(C/A \cap B)$$

Ex (2.40) :-

سحبنا ٣ اوراق من دون ارجاع

A_1 = The First card is a red

A_2 = The second card is a 10 or Jack (ولد)

A_3 = The Third card is greater than (3) but less than (7)

Find :-

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

$$P(A_1) = \frac{2}{52}$$

$$P(A_2/A_1) = \frac{8}{51}$$

51 ← لأنه في واحد سحبناه

$$P(A_3/A_1 \cap A_2) = \frac{12}{50}$$

12 ← انواع 3x4

$\rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$

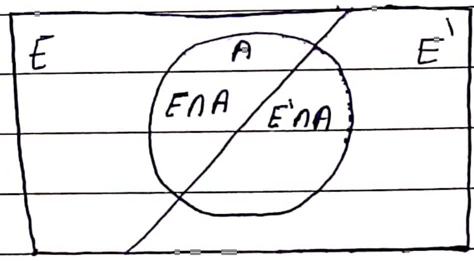
$P(A_1) \times P(A_2/A_1) \times P(A_3/A_2 \cap A_1)$

$= \frac{2}{52} \times \frac{8}{51} \times \frac{12}{50}$

* Bayes' Rule :-

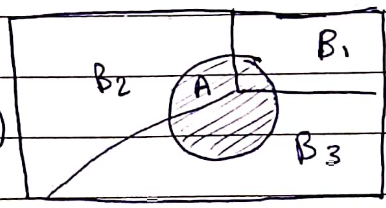
مقسمة لقسمين

$$P(A) = P(A \cap E) + P(A \cap E')$$
$$= P(E)\,P(A/E) + P(E')\,P(A/E')$$



مقسمة لـ 3 اقسام

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3)$$
$$= P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + P(B_3)P(A/B_3)$$



وعند الجزات السابقة معروف انت

<u>Ex</u> (2.41)

ماكينات
$$\left[\begin{array}{l} B_1 \to 30\% \to 2\% \text{ Defective} \\ B_2 \to 45\% \to 3\% \text{ Defe} \\ B_3 \to 25\% \to 2\% \text{ Defe} \end{array}\right.$$

$P(B_1) = 0.3$ $\quad P(D/B_1) = 0.02$

$P(B_2) = 0.45$ $\quad P(D/B_2) = 0.03$

$P(B_3) = 0.25$ $\quad P(D/B_3) = 0.02$

لنفترض انه سحبنا قطعة شو احتمال انها معيوبة D ؟

$$P(D) = P(D \cap B_1) + P(D \cap B_2) + P(D \cap B_3)$$

$$P(D) = P(B_1)P(D/B_1) + P(B_2)\,P(D/B_2) + P(B_3)\,P(D/B_3)$$

$$= (0.3 \times 0.02) + (0.45 \times 0.03) + (0.25 \times 0.02) =$$

$$= 0.0245$$

* Bayes' Rule :-

Theorem :-

$$P(B_r \backslash A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^{k} P(B \cap A)} = \frac{P(B_r)\;P(A \backslash B_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_r)\;P(A \backslash B_r)}$$

$P(A) =$ تقريبًا

بحل على ال Bayes Rule اذا كان معطيني بالسؤال (احتمال مشروط) وطالب عكسه مثل
لما يعطيني (A/B) وطالب (B/A)

<u>Ex</u> (2.42) بالرجوع ل <u>Ex 2.41</u> شو احتمال انها معيوبة
D وجاي من B_3

هلا احنا بالسؤال كانت $P(D/B_3)$
الآن بدنا $P(B_3/D)$

$$P(B_3/D) = \frac{P(B_3)\;P(A/B_3)}{P(B_1)\,P(A/B_1) + P(B_2)\,P(A/B_2) + P(B_3)\,P(A/B_3)} \underset{\text{بالتعويض}}{=} \frac{10}{49}$$

المقام كله عبارة عن $P(A)$

EX (2.43) :-

٣ خطوط

$$\left[\begin{array}{l} 1 \rightarrow 30\% \quad P(P_1) \\ 2 \rightarrow 20\% \quad P(P_2) \\ 3 \rightarrow 50\% \quad P(P_3) \end{array}\right.$$

$P(D/P_1) = 0.01$ / $P(D/P_2) = 0.03$ / $P(D/P_3) = 0.02$

لو الاشياء التالفه اللي من الخطه الاولى.

سحبنا قطعه وطلعت D شو احتمال انها تكون من الخطة الاولى او الثانيه او الثالثه وشوف مين اكثر خطه مسؤولة :-

$$P(P_1/D) = \frac{P(P_1)\,P(D/P_1)}{P(P_1)\,P(D/P_1) + P(P_2)\,P(D/P_2) + P(P_3)\,P(D/P_3)} = 0.158$$

$P(P_2/D) = 0.316$

$P(P_3/D) = 0.526$

اذاً الخطة الثالثه هي المسؤولة.

يعني اللي سحبناه ع الأغلب من الخطة الثالثه.

Chapter 3 :-

Random Variables and probability Distributions.

$S = \{a, b, c, d, e\}$
$= \{$ Ahmed, Mohammad, ... $\}$

تجربة حجر نرد

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$X = X \cup x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Capital لازم

Random variabl عبر بحد على

$S = (NNN, NND, NDN, DNN, NDD, DND, DDN, DDD\}$

عدد القطع التالفة

$0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3$

$X = \{0, 1, 2, 3\}$

EX 3.1 :- اذا سحبنا كرتين من صندوق يحتوي على ٤ كرات حمر و ٣ كرات سود شو راح يكون الكرتين

Sample space	y → The ~~Random variable~~ number of red ball
RR	2
RB	1
BR	1
BB	0

$X = \{0, 1, 2\}$
Random variable

EX :- 3.2 :- ٣ اشخاص و ٣ طواقي عليهم اسماء الاشخاص داعطيناهم الطواقي بطريقة عشوائية شو احتمال التطابق الصحيح.

الرسم الشخصي [S J B]

Sample space	m
S J B	3
S B J (هاي صح فقط)	1
B J S	1
J S B (هاي صح فقط)	1
J B S	0
B S J	0

$X = \{0, 1, 3\}$

EX 3.3 :-

سحبنا قطعة من خط انتاج اذا كانت D ← zero
واذا كانت N ← 1

التحويل من space الى Random variable

$$X = \begin{cases} 1 & \text{if the component is defective} \\ 0 & \text{if the component is not defective} \end{cases}$$

EX 3.4 :-

في مواد مشترى لمكان معين واحنا يا موافق او لا
وكان منها ١٠٠ مادة و ١٢ منهم D بدنا نوخذ من هاي العينة
١٠ عشوائيا شو احتمال عدد D

$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

عدد ال Defective in the selected sample

EX 3.6

بدنا نسبة الناس اللي قرءو المقال اذا كانت (X) نسبة
فإن Random $0 \leq X \leq 1$

لا نسبة صفر. نسبة ١٠٠٪

EX 3.7 :-

(X) زمن الانتظار بالساعات

Random variable. $X \mid x \geq 0$

* Definition :- If asample space contains afinit (محدود) number of possibilities or an unending sequence with as many elements as there are whole numbers it is called a (discerete sample space)

مثل

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ← Discrete sample space اذا عدد محدود

* Definition :- If asample space contains as infinite number of possibilities equal to the number of points on aline segments it is called acontinuous sample space.

مثل $0 \leq X \leq 1$

continous

لانه عدد ارقام لا نهاية بالفترة.

* 3.2 Discrete probability Distributions.

تابع لمثال (3.2)

Random varible X	0	1	3
f(x)	2/6	3/6	1/6

P(M=m)
= probability distribution.

Definition :- The set of ordered pairs (x, f(x)) is a probability function, probability mass function, or probability distribution of the discrete random variable X if, for each possible out come x,

الصفات او الشروط

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum f(x) = 1$ → مجموع الاحتمالات = ١
3. $p(X=x) = f(x)$ → خاصية لل Discrete

Ex 3.8 :-

في مدرسة الشرق 2 Laptop فاذا
Find the probability distribution

20 laptop
3 → Def
17 → N

X	0	1	2
f(x)	68/95	51/190	3/190

ولا واحد معطوب — الاثنين

$f(0) = P(X=0) = \frac{17}{20} \times \frac{16}{19} = \frac{68}{95}$

$f(1) = P(X=1) = \frac{17}{20} \times \frac{3}{19} \times 2 = \frac{51}{190}$

للترتيب اما ان يكون الاول D والثاني N
او الاول N والثاني D

$f(2) = P(X=2) = \frac{3}{20} \times \frac{2}{19} = \frac{3}{190}$

Five Apple

EX 3.9 :-

عنا وكالة سيارات تبيع ٥٠٪ من نوع معين من السيارات. فيها air bags و نسبة السيارات اللي ما فيها air bags كمان ٥٠٪

المطلوب انه نوجد صيغة معينة من P.F من عدد السيارات اللي فيها air bag بالاربع سيارات اللي بدهم يتباعو

ولا وحدة air bags

X	0	1	2	3	4
f(X)	$(\frac{1}{2})^4\binom{4}{1}$	$(\frac{1}{2})^1(\frac{1}{2})^3$	$(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^2\binom{4}{2}$	$(\frac{1}{2})^1(\frac{1}{2})^3\binom{4}{3}$	$(\frac{1}{2})^4$

الترتيب

ترتيب

$(\frac{1}{2})^4\binom{4}{4}$

$[\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}]$ ← لأنهم ٤ سيارات

$(\frac{1}{2})^4\binom{4}{3}$

ونضرب ب (٤) لأنه ممكن الأولى اللي فيها او الثانية او الثالثة - او الرابعة فنضرب ب (٤) للترتيب.

$$= 4\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

صيغة نهائية ← $f(X) = \frac{1}{16} \times \binom{4}{X}$

Definition :- The cumulative distribution function $F(X)$ of a discrete random variable X with probability distribution $f(x)$ is :-

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t) \qquad \text{for } -\infty < X < \infty$$

- $f(X)$ → احتمال عند نقطة معينة / $F(x)$ → احتمال من $-\infty$ إلى النقطة المعينة

$f(X)$ ← بسموها pdf ، $F(x)$ ← cdf

يعني لو نرجع لمثال EX 3.2 :

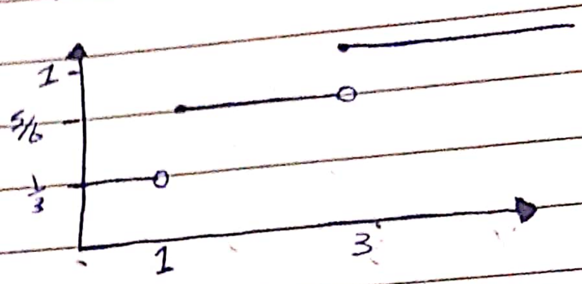
$$f(X) = \begin{cases} 1/3 & X = 0 \\ 1/2 & X = 1 \\ 1/6 & X = 3 \\ 0 & \text{other ways.} \end{cases}$$

$F = P(X \leq x)$

$F(0) = \frac{1}{3}$ / $F(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ / $F(3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$

$F(10^4) = 1$ ← لأنه فوق بال (3) و $F(3) = 1$ فخلص بيثبت على 1

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1/3 & 0<x<1 \\ 1/3 + 1/2 = 5/6 & 1 \le x < 2 \\ 1 & 2 \le x \end{cases}$$

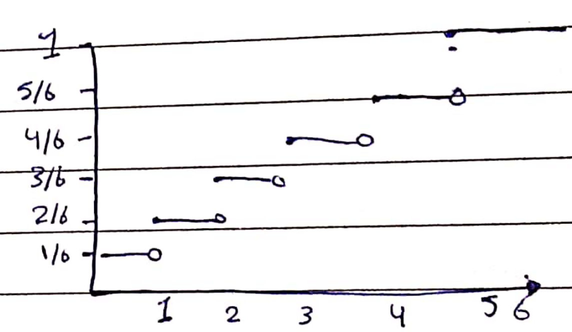


مثال عليه مهم النرد

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

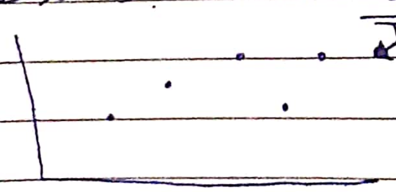
x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x<1 \\ 1/6 & 1 \le x < 2 \\ 1/6+1/6 = 2/6 & 2 \le x < 3 \\ 1/6+1/6+1/6 = 3/6 & 3 \le x < 4 \\ 4/6 & 4 \le x < 5 \\ 5/6 & 5 \le x < 6 \\ 1 = 6/6 & 6 \le x \end{cases}$$

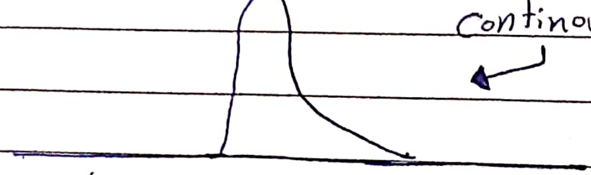


* 3.3 Continuous probability Distribution :-

اما الـ Discrete كانت عبارة عن نقاط



رسمته مثلاً بكون continous



هذا صندلو بحكي بروح

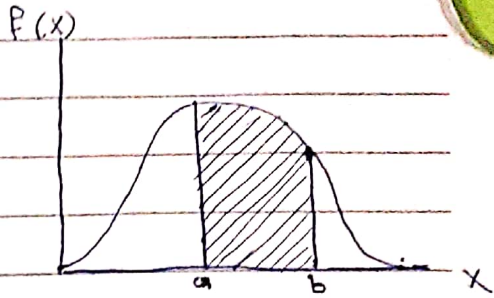
$f(1) = 0$

لأن الواحد عبارة عن رقم من مجموعة لا منتهية

فإن احتمالية رقم من مجموعة لا منتهية (∞) هو صفر

$$P(a<x<b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

لأنه عبارة عن مساحة



اقتران احتمال

Definition :- The function $f(x)$ is a probability density function (pdf) for the continous random variable X. defined over the set of real numbers if :

1) $f(x) \geq 0$ for all $x \in \mathbb{R}$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \longrightarrow 1 =$ مجموع الاحتمالات

3) $P(a<X<b) = \int_a^b f(x)\,dx$

Ex 3.11 :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} & , -1<X<2 \\ 0 & , \text{else where} \end{cases}$$

[a] verify that $f(x)$ be a density function.

عشان يكون اقترانا احتمال لازم يحقق الشرطين اللي فوق

1) $f(x) > 0$

2) $\int_{-1}^{2} x^2/3\,dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 1$

[b] Find $P(0<x\leq 1) = \int_0^1 x^2/3 \rightarrow \frac{1}{9} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{9} - 0 = \frac{1}{9}$

$F(x)$

* The cumulative distribution function $F(x)$ of a continuous random variable X with density function $f(x)$ is

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \quad \text{for } -\infty < x < \infty$$

Ex Cumulative density function from Ex 3.11 :

a) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-1}^{x} \frac{t^2}{3}\,dt$

$F(x) = \frac{x^3+1}{9} \quad -1 < x < 2$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{x^3+1}{9} & -1 \leq x \leq 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}$$

اشارات المساواة ما بتفرق لأنه متصل

b) $P(0 < X \leq 1) = \int_{0}^{1} x^2/3\,dx$

$= \frac{x^3}{9} = \frac{1}{9}$

وممكن نحل ع الطريقة الثانية

$F(1) - F(0) =$

$= \frac{x^3+1}{9} - \frac{x^3+1}{9} = \frac{1-0}{9} = \frac{1}{9}$

Ex 3.13 :-

$$f(y) = \begin{cases} 5/8b, & \frac{2}{5}b \leq y \leq 2b \\ 0, & \text{else where.} \end{cases}$$

a) Find $F(y)$:-

$F(y) = \int_{2/5b}^{y} \frac{5}{8b}\,dt \rightarrow \frac{5y}{8b} - \frac{1}{4}$

b) $P(y \leq b) = F(b) = \frac{5b}{8b} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

$$F(y) = \begin{cases} 0 & / \ y < \frac{2}{5}b \\ \frac{5y}{8b} - \frac{1}{4} & / \ \frac{2}{5}b \leq y < 2b \\ 1 & / \ y \geq 2b \end{cases}$$

3.4 :- Joint probability Distribution :-

random variable → X ⟶ $f(x)$

2 - random variable → X, Y ⟶ $\underbrace{f(x, y)}_{\text{Joint}}$

$f(x,y) \rightarrow P(X=x, Y=y)$

Definition :- The function $f(x,y)$ is a Joint probability distribution or probability mass function of the discrete random variable X and Y if :-

1) $f(x,y) \geq 0$ for all x, y
2) $\sum_x \sum_y f(x,y) = 1$
3) $P(X=x, Y=y) = f(x,y)$

EX 3.14 :-

تطلعين حبر من صندوق فيه عدة اقلام

X = # of blue
Y = # of Red

3B
2R
3G

القيم المحتملة

X : 0 , 1 , 2

ولا واحد ازرق.

Y : 0 , 1 , 2

$P(X=0, Y=0) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7}$

يعني لا ازرق ولا احمر اذا اخضر.

$f(x,y) = 3/28$

	X = 0	X = 1	X = 2	h(Y)
Y = 0	3/28	9/28	3/28	15/28
Y = 1	3/14	3/14	0	3/7
Y = 2	1/28	0	0	1/28
g(X)	5/14	15/28	3/28	1

السهم $h(Y)$

margen
$= g(X)$

Joint probability Distribution.

a. what is the probability to set 1 blue and 1 red Pens :- $\boxed{\frac{3}{14}}$ من الجدول

$P(X=1, Y=1) = f(1,1) = \frac{3}{14}$

b. what is the probability to have 1 ~~red~~ blue ~~to~~ pen ?

$P(X=1) \rightarrow P(X=1, Y=0) + P(X=1, Y=1) + P(X=1, Y=2)$

$= \frac{9}{28} + \frac{3}{14} + 0 = \boxed{\frac{15}{28}} \rightarrow$ margen

بنسميه

يعني طرف

c. What is the probability to select a red pen.

$P(y=0) \rightarrow P(X=0, Y=0) + P(X=1, Y=0) + P(X=2, Y=0)$

$= \frac{15}{28} = h(y)$

d. $P((X, Y) \in A)$, where A is the region $\{(x,y) \mid \underbrace{x+y \leq 1}\}$

$$\boxed{\begin{array}{l} x=0 \mid y=0 \\ x=1 \mid y=0 \\ x=0 \mid y=1 \end{array}}$$

$= \frac{3}{28} + \frac{9}{28} + \frac{3}{14} = \frac{18}{28} = \frac{9}{14}$

* The function $f(x,y)$ is a Joint density function of the continuous random variables X and Y if :-

1. $f(x,y) \geq 0$ for all x,y
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \, dx \, dy = 1$
3. $P((X,Y) \in A) = \iint_A f(x,y) \, dx \, dy$ for any region A in the xy plane.

Ex 3.15 :-

$$f(x,y) = \begin{cases} 2/5\,(2x+3y) & , 0 \leq x \leq 1 , \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & , \text{else where} \end{cases}$$

[a.] : verify Condition 2 of Definition 3.9.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\,dx\,dy.$$

$$= \int_0^1 \frac{2x^2}{5} + \frac{6xy}{5}\Big|_{x=0}^{x=1} dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2}{5} + \frac{6y}{5}\right) dy = \left(\frac{2y}{5} + \frac{3y^2}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$

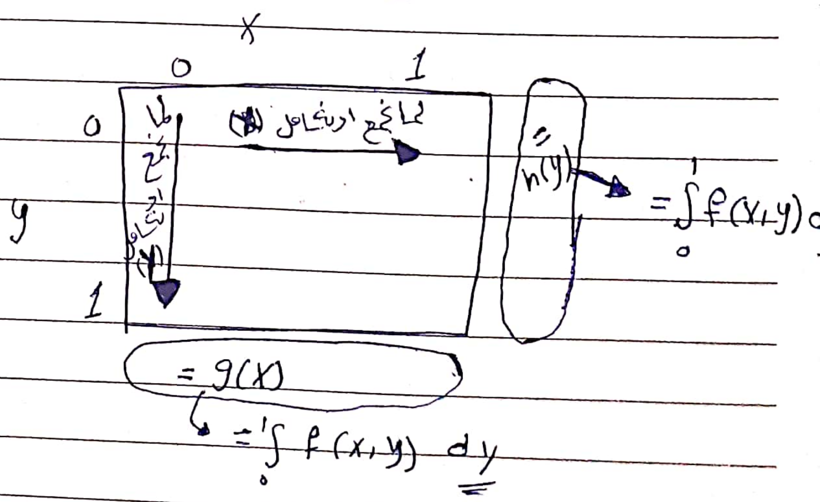
بما انها 1 ادا density function

[b] Find $P[(x,y) \in A]$, where $A = \{(x,y) \mid 0 < x < \frac{1}{2} , \frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}\}$

$$= \int_{1/4}^{1/2}\int_0^{1/2} \frac{2}{5}(2x+3y)\,dx\,dy.$$

$$= \int_{1/4}^{1/2} \frac{2x^2}{5} + \frac{6xy}{5}\Big|_{x=0}^{x=1/2} dy = \int_{1/4}^{1/2}\left(\frac{1}{10} + \frac{3y}{5}\right) dy.$$

$$= \frac{y}{10} + \frac{3y^2}{10}\Big|_{1/4}^{1/2} = \frac{1}{10}\left[\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4}\right) - \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{16}\right)\right] = 13/160$$



The marginal distributions of X alone and of Y alone are

$g(x) = \sum_y f(x,y)$ and $h(y) = \sum_x f(x,y)$

عكس بعض

for the discrete case, and

$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$ and $h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$

for the continous case

Ex 3.16 :- EX 3.14 من الجدول من

$g(0) = f(0,0) + f(0,1) + f(0,2) = 3/28 + 3/14 + 1/28 = 5/14$

$g(1) = f(1,0) + f(1,1) + f(1,2) = 9/28 + 3/14 + 0 = 15/28$

$g(2) = f(2,0) + f(2,1) + f(2,2) = 3/28 + 0 + 0 = 3/28$

x	0	1	2
g(x)	5/14	15/28	3/28

y	0	1	2
h(y)	15/28	3/7	1/28

EX 3.17 :- Ex 3.15 بالرجوع اليه

$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\,dy = \frac{4xy}{5} + \frac{6y^2}{10}\Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{4x+3}{5}$

$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\,dx = \frac{3(1+3y)}{5}$

Scanned with CamScanner

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(Y=y \backslash X=x) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x)} = \frac{f(x,y)}{g(x)}$$

$$f(y \backslash x) = \frac{f(x,y)}{g(x)} \quad / \quad f(x \backslash y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}$$

$$p(a<x<b \mid Y=y) = \sum_{a<x<b} f(x \backslash y) = \int_a^b f(x \backslash y)$$

$$p(a<y<b \backslash X=x) = \sum f(y \backslash x)$$

EX 3.18 :- بالرجوع ل EX 3.14

Find the conditional distribution of X, بالرموز given that $Y=1$, and use it to determine $p(X=0 \mid Y=1)$

$$h(1) = \sum_{x=0}^{2} f(x,1) = \frac{3}{14} + \frac{3}{14} + 0 = \frac{3}{7}$$

$$f(x \backslash 1) = \frac{f(x,1)}{h(1)} = \frac{7}{3}(f(x,1)) : \quad x = 0, 1, 2$$

$$f(0 \backslash 1) = \frac{7}{3} \times \frac{3}{14} = \frac{1}{2} \quad / \quad f(1,1) = \frac{7}{3} \times \frac{3}{14} = \frac{1}{2}$$

$$f(2 \mid 1) = \frac{7}{3} \times (0) = 0$$

x	0	1	2
$f(x \backslash 1)$	1/2	1/2	0

EX 3.159 :

$$f(x,y) = \begin{cases} 10xy^2 & 0<x<y<1 \\ 0 & \text{else where} \end{cases}$$

a. Find the marginal densities $g(x)$, $h(y)$ and the Conditional density $f(y|x)$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_{x}^{1} 10xy^2\,dy$$

$$= \frac{10}{3} x y^3 \Big|_{y=x}^{y=1} = \frac{10}{3} x(1-x^3) \quad , \quad 0<x<1$$

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_{0}^{y} 10xy^2\,dx = 5x^2y^2 \Big|_{x=0}^{x=y}$$

$$= 5y^4$$

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{g(x)} = \frac{10\,xy^2}{\frac{10}{3}x(1-x^3)} = \frac{3y^2}{1-x^3}$$

[b] Find the probability that the spectrum shifts more than half of the total observations, given that the temperature is incresed by 0.25 unit.

$$P(Y>1/2 \mid X=0.25) = \int_{1/2}^{1} f(y|x=0.25)\,dy = \int_{1/2}^{1} \frac{3y^2}{1-0.25^3}\,dy$$

$$= \frac{8}{9}$$

Scanned with CamScanner

Ex 3.20 :-

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x(1+3y^2)}{4} & 0<x<2 / 0<y<1 \\ 0 & \text{else where} \end{cases}$$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^1 \frac{x(1+3y^2)}{4}\,dy = \frac{xy}{4} + \frac{xy^3}{4}\Big|_{y=0}^{y=1}$$

$$= \frac{x}{2}$$

$$h(y) = \int_0^2 \frac{x(1+3y^2)}{4}\,dx = \frac{x^2}{8} + \frac{3x^2y^2}{8}\Big|_{x=0}^{x=2}$$

$$= \frac{1+3y^2}{2}$$

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)} = \frac{x(1+3y^2)/4}{(1+3y^2)/2} = \frac{x}{2}$$

$$P(\tfrac{1}{4} < X < \tfrac{1}{2} \mid Y = \tfrac{1}{3}) = \int_{1/4}^{1/2} \frac{x}{2}\,dx = \frac{3}{64}$$

* statical Independence :- ما بعتمدو على بعض

$f(x,y) = g(x)\ h(y)$ ✓

لـ 2 random variables يكونوا ما بعتمدو على بعض

Ex 3.21 :-

بالرجوع لـ Ex 3.14 :-

$f(x,y) = g(x)\,h(y)$

باخذ اي نقطة وبتأكد انه

$f(1,2)$ فـ مثلاً لو اخذنا نقطة ٥ و ص

$= g(x)\ h(y)$

$0 = \frac{15}{28} \times \frac{1}{28}$ اكيد لا

$\therefore$ not Independent

Ex 3:22 :-

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

اذا كان عندي 3 random variable هل بكون In dep or Dep

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1) * f(x_2) \times f(x_3) = e^{-x_1} \cdot e^{-x_2} e^{-x_3}$$

$$P(x_1 < 2 , 1 < x_2 < 3 , x_3 > 2) = \int_2^{\infty} \int_1^{3} \int_0^{3} e^{-x_1 - x_2 - x_3} \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3$$

$$= (1 - e^{-2})(e^{-1} - e^{-3}) e^{-2} = 0.0372$$

Scanned with CamScanner

Ch (4) :- Mathmatical expectation (mean)

$E(X) \rightarrow$ expect value $=$ Avg

عند اختيار جزء من هذه العينة نتوقع ان يكون طولها (2.02)

↳ $E(X) = \text{mean}$

* عند رمي قطعتين نقد

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$

number of head $X = 0, 1, 2$

فمثلا نعمل التجربة (١٦) مرة في كل مرة قطعتين نقد

trial	X
1	0
2	1
3	0
4	2

(0) عدد مرات عدم ظهور صورة $\rightarrow 4$

(1) عدد مرات ظهور صورة $\rightarrow 7$

(2) عدد مرات ظهور صورة مرتين $\rightarrow 5$

$4+7+5=16$

$$\text{Mean} = \frac{(0)*(4) + (1)(7) + (2)(5)}{16} = 1.06$$

- في حال زيادة عدد مرات التجربة عادة نحصل على رقم قريب من (Theortical)

* (4.1)

$$\mu = E(x) = \sum x\, f(x)$$

مجموع (ال (X) مضروب بالاحتمال لل (X))

* If (X) discrete

* $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$ $\rightarrow$ If (X) continous

E~~x~~ - (4.1) دفعة تحتوي على 7 عبوات (4G / 3D) قام ما معنى مكوره
بسحب 3 عبوات

- Find the expected value of the number of good componets in this sample.

$x = 0, 1, 2, 3$

$E(M) = \sum_x x f(x)$ $\qquad f(x) = \dfrac{\binom{4}{x}\binom{3}{3-x}}{\binom{7}{3}}$

$M = (0)(1/35) + (1)(12/35) + (2)(18/35) + (3)(4/35)$

$= 12/7 = 1.7$

Ex (4.3) :- $f(x) = \begin{cases} \dfrac{20.000}{x3} & x > 100 \end{cases}$

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$

$= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \dfrac{20000}{x^{33}} dx = 200$

$X \rightarrow$ random Variable

$g(X) \rightarrow$ function of random Variable.

$E(g(x)) = \sum g(x) f(x) \longrightarrow$ discrete.

$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(X) f(x) \longrightarrow$ Continous

Ex (4.4) :- $X \rightarrow (4-5)$ عدد السيارات التي يتم غسلها بين الساعة

x	4	5	6	7	8	9
$f(X=x)$	1/12	1/12	1/4	1/4	1/6	1/6

$g(x) = 2x - 1 \rightarrow$ represent the amount of money in dollars

$E[g(x)] = E(2x-1) = \Sigma(2x-1)f(x)$

$= (2*4-1)(1/12) + (2*5-1)(1/12) + (2*6-1)(1/4) +$

$(2*7-1)(1/4) + (2*8-1)(1/6) + (2*9-1)(1/6)$

$= 12.67$

Ex 4.5 :-

$$f(x) = \begin{cases} x^2/3 & -1 < x < 2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$g(x) = 4x + 3$

$E(g(x)) = \int_{-1}^{2} x^2/3 \, (4x+3)\, dx \quad = 8$

Definition (4.2) :-

$M(x,y) = E[g(x,y)] = \Sigma_x \Sigma_y \, g(x,y) \, f(x,y) \rightarrow$ If x, y discret

$M(x,y) = E[g(x,y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) \, f(x,y) \, dx dy \rightarrow$ If x, y contin

Ex 4.6 :-

find $g(x,y) = xy$

$E(g(x,y)) = \Sigma\Sigma \, g(x,y) \, f(x) = \Sigma\Sigma \, x.y.f(x).$

$= (0)(0)(3/28) + (0)(1)(3/14) + (0)(2)(1/28) + (1)(0)(9/28) + (1)(1)(3/14) +$

$(1)(0)(0) + (2)(0)(3/28) + (2)(1)(0) + (2)(2)(0) = 3/14$

Ex 4.7 :- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x(1+3y^2)}{4} & 0 < x < 2 \, / \, 0 < y < 1 \end{cases}$

$E(y/x) = \int_0^1 \int_0^2 \frac{y}{x} \left(\frac{x(1+3y^2)}{4}\right) dx \, dy = 5/8$

4.2 variance and convariance of Random Variables :-

$\sigma^2 = E[(X-M)^2] = \sum_x (X-M)^2 f(x) \rightarrow$ If X discrete

$\sigma^2 = E[(X-M)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (X-M)^2 f(x)dx \rightarrow$ If X cont

Ex (4.8) :-

$\sigma_A^2 = \sum (X-M)^2 f(x)$

$M = E(X) = ((1)(.3) + (2)(.4) + (3)(0.3) = 2$

$\sigma^2 = (1-2)^2(.3) + (2-2)^2(.4) + (3-2)^2(.3) = .6$

$\sigma_B^2 = \sum (X-M)^2 f(x)$

$M = E(X) = (0)(.2) + (1)(.1) + (2)(.3) + (3)(.3) + (4)(.1) = 2$

$\sigma_B^2 = (0-2)^2(.2) + (1-2)^2(.1) + (2-2)^2(.3) + (3-2)^2(.3) + (4-2)^2(.1)$

$= 1.5$

Theorem (4.2)

$\sigma^2 = E(X-M)^2$

$E(X^2 - 2M_x + M^2)$

$E(X^2) - 2M\underbrace{E(X)}_{M} + E(M^2)$ $\qquad E(R) = R$ ↳ constant

$= E(X^2) - 2M^2 + M^2$

$\sigma^2 = E(X^2) - M^2$

Ex (4.9) :-

$\sigma^2 = \sum (X-M_x)^2 f(x)$

$M = E(X) = (0)(.51) + (1)(.38) + (2)(.10) + (3)(.01) = .61$

$E(X^2) = \sum X^2 f(x)$

$E(X^2) = (0^2)(.51) + (1)^2(.38) + (2)^2(.10) + (3)^2(.01)$

$= .87$

$\sigma^2 = .87 - (.61)^2 = .4979$

Ex (4.10) :- $f(x) = \begin{cases} 2(x-1) & 1<x<2. \\ 0 & \text{else where} \end{cases}$

Find the mean and variance :-

$E(X) = \int_1^2 (x) \, (2(x-1)\,dx = 5/3$

$E(x^2) = \int_1^2 x^2 \, (2(x-1))\,dx = 17/6$

$\sigma^2 = \frac{17}{6} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = 1/18$

* Theorem (4.3)

$\sigma^2_{g(x)} = E\left[g(x) - \mu_{g(x)}\right]^2 = \sum_x \left[g(x) - \mu_{g(x)}\right] f(x)$ → If X discrete.

$\sigma^2_{g(x)} = E\left[g(x) - \mu_{gx}\right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[g(x) - \mu_{g(x)}\right]^2 f(x)\,dx$ → If X cont

Ex (4.11) :- Calculate the variance of $g(x) = 2X+3$

$\mu_{g(x)} = E(g(x)) = \sum (2x+3) \, f(x)$

$= (0\times2+3)(1/2) + (1\times2+3)(1/8) + (2\times2+3)(1/2) + (3\times2+3)(1/8)$

$= 6$

$\sigma^2_{2x+3} = E\left[\left((2x+3) - (\mu_{2x+3})\right)^2\right] = E\left[(2x+3-6)^2\right]$

$= E(4x^2 - 12x + 9) = \sum_{x=0}^{3} 4x^2 - 12x + 9) \, f(x) = 4.$

Ex (4.12) :- Find the varianceof random variable

$g(x) = 4X + 3.$ $f(x) = \left\{ \frac{x^2}{3} \quad -1<x<2 \right.$

$\mu_{(4x+3)} = 8$

$\sigma^2_{g(x)} = E\left[(g(x) - \mu_{g(x)})^2\right] = E\left[(4x-5)^2\right]$

$= \int_{-1}^{2} (4x-5)^2 \, (x^2/3)\,dx = 51/5$

Five Apple

Scanned with CamScanner

Defintion (4.4) :-
let X and y be random variables with joint probability distribution $f(x,y)$, the coverience of x and y is

* $\sigma_{xy} = E[(x-\mu_x)(y-\mu_y)] = \sum_x \sum_y (x-\mu_x)(y-\mu_y) f(x,y)$
If x, y are discrete.

* $\sigma_{xy} = E[(x-\mu_x)(y-\mu_y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)(y-\mu_y) f(x,y)\, dx\, dy$
If X and y are cont

* Variance [it must always be positive]
* Convariance [it can be positive or negative]

$\sigma_{xy} = 0 \Rightarrow x, y$ (independent)

((If convariance between x and y is zero, X and y may have anon linear relationship, which means that they are not necessarily))

EX (4.13) :-

$E(x,y) = (0)(0)(3/28) + (0)(1)(3/14) + (0)(2)(1/28) + (1)(0)(9/28) + (1)(1)(3/14) + (1)(2)(0) + (2)(0)(3/28) + (2)(1)(0) + (2)(2)(0)$
$= 3/14$

$E(X) = \mu_{(x)} = (0)(5/14) + (1)(15/28) + (2)(3/28) = 3/4$
$E(y) = \mu_{(y)} = (0)(15/28) + (1)(3/7) + (2)(1/28) = 1/2$

$\sigma(x,y) = E(x,y) - \mu_x \mu_y$
$= \frac{3}{14} - \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-9}{56}$

Ex (4.14) :-

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy & 0 \le y \le x \le 1 \\ & \end{cases}$$

Find the covariance of x and y

$$\sigma_{xy} = E(xy) - \mu_x \mu_y$$

$$E(xy) = \int_0^1 \int_y^1 (xy)(8xy)\, dx\, dy$$

$$E(xy) = \frac{4}{9}$$

$$E(x) = \mu(x) = \int_0^1 x\, g(x)\, dx$$

$$g(x) = \int_0^x 8xy\, dy = \frac{8xy^2}{2}\Big]_0^x$$

$$g(x) = 4x^3$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{4xy^2}{2} & 0 \le x \le 1 \\ & \end{cases}$$

$$\mu(x) = \int_0^1 x\, g(x)\, dx = \int_0^1 x\,(4x^3) = \int_0^1 4x^4\, dx = \frac{4}{5}$$

$$E(y) = \mu(y) = \int_0^1 y\, h(y)\, dy$$

$$h(y) = \int_y^1 (8xy)\, dx - \frac{8x^2y}{2}\Big]_y^1$$

$$h(y) = \frac{8y - 8y^2}{2}$$

$$h(y) = 4y(1-y^2)$$

$$h(y) = \begin{cases} 4y(1-y^2) & 0 \le y \le 1 \\ & \end{cases}$$

$$\mu(y) = \int_0^1 (y)(4y(1-y^2))\, dy = \frac{8}{15}$$

$$\sigma_{xy} = E(xy) - \mu_x \mu_y$$

$$(4/9) - (4/5)(8/15) = 4/225$$

* Definition (4.5) :- let X and y be random variable with covariance σ_{xy} and standard deviations σ_x and σ_y. The correlation coefficient of X and y is

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Ex (4.15) :- Find the correlation coefficient between X and y

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$\sigma_{xy} = E(xy) - \mu_x \mu_y = -9/56$$

$$\sigma_x^2 = E(x^2) - (\mu(x))^2$$

$$E(x^2) = (0)^2(5/14) + (1)^2(15/28) + (2)^2(3/28) = 27/28$$

$$(\mu(x))^2 = (3/4)^2 = 9/16$$

$$\sigma_x^2 = 27/28 - 9/16 = 45/112$$

$$\sigma_y^2 = E(y^2) - (\mu(y))^2$$

$$E(y^2) = (0)^2(15/28) + (1)^2(3/7) + (2)^2(1/28) = 4/7$$

$$(\mu(y))^2 = (1/2)^2 = 1/4$$

$$\sigma_y^2 = (4/7) - (1/4) = 9/28$$

$$\rho_{xy} = \frac{-9/56}{\sqrt{(45/112) * (9/28)}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Ex 4.16 :- Find the correlation coefficient of X and y

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \qquad \sigma_{xy} = E(xy) - \mu_x \mu_y = 4/225$$

$$\sigma_x^2 = E(x^2) - (\mu(x))^2 \Rightarrow 2/3 - 16/25 = 2/75$$

$$E(x^2) = \int_0^1 4x^5\, dx = 2/3$$

$$(\mu(x))^2 = (4/5)^2 = 16/25$$

$\sigma_y^2 = E(y^2) - (M(y))^2 \Rightarrow 1/3 - \frac{64}{225} =$

$E(y^2) = \int_0^1 4y^3(1-y^2)\,dy = 1/3$

$(M(y))^2 = (8/15)^2 = \frac{64}{225}$

$\rho_{xy} = \frac{4/225}{\sqrt{(2/75) * (11/225)}} = 4/\sqrt{66}$

* Means and variances of linear combinations of Random variables

$E(ax+b) = a\,E(X) + b$

Ex (4.17) :- $E(X) = 2X - 1$

$E(2X-1) = 2E(X) - 1$

$E(X) = (4)(1/12) + (5)(1/12) + (6)(1/4) + 7(1/4) + (8)(1/6) + (9)(1/6) = \frac{41}{6}$

$= 2 * (41/6) - 1 = 12.67$

Ex 4.18 $g(X) = 4X + 3$

$E(4X+3) = 4E(X) + 3$

$E(X) = \int_{-1}^{2} x\,(x^2/3)\,dx = 5/4 \quad = 4(5/4) + 3 = 8$

* $E[g(x) \pm h(x)] = E[g(x)] \pm E[h(x)]$

Ex (4.19) :

x	0	1	2	3
$f(x)$	1/3	1/2	0	1/6

Find the expected value of $y = (X-1)^2$

$y = x^2 - 2X + 1$

$E(y) = E(X^2) - 2E(X) + 1$

$E(X) = (0)(1/3) + (1)(1/2) + (2)(0) + (3)(1/6) = 1$

$E(X^2) = (0)(1/3) + (1)(1/2) + (4)(0) + (9)(1/6) = 2$

$E(y) = 2 - 2(1) + 1 = 1$

Ex (4.20) :- $g(x) = x^2 + x - 2$ $\quad f(x) = \begin{cases} 2(x-1) & 1 < x < 2 \end{cases}$

Find the expected value of the weekly demand for the drink:-

$E(x^2 + x - 2) = E(x^2) + E(x) - E(2)$.

$E(x) = \int_1^2 2x(x-1)\,dx = 5/3$

$E(x^2) = \int_1^2 2x^2(x-1)\,dx = 17/6$

$= \frac{17}{6} + 5/3 - 2 = 5/2$

* let X and y be two independent random variable

$E(xy) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\,y\,f(xy)\,dx\,dy$

$f(x,y) = g(x)\,h(y)$

$E(xy) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,y\,g(x)\,h(y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} x\,g(x)\,dx \int_{-\infty} y\,h(y)\,dy$.

Example (4.21):- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x(1+3y^2)}{4} & 0 < x < 2 / 0 < y < 1 \end{cases}$

show that $E(xy) = E(x)\,E(y)$

$E(xy) = \int_0^1\int_0^2 x\,y\,\frac{(x(1+3y^2))}{4}\,dx\,dy = 5/6$

$E(x) = \int_0^2 x\,g(x)\,dx = 4/3$

$g(x) = \int_0^1 \frac{x(1+3y^2)}{4}\,dy$

$E(y) = \int_0^1 y\, h(y)\, dy = 5/8$

$h(y) = \int_0^2 \frac{x(1+3y^2)}{4}\, dx$

$5/6 \stackrel{?}{=} \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{5}{8}\right) \Rightarrow \frac{5}{6} = 5/6$ ✓

✱ If x and y are rando variable with Joint probability distribution $f(x,y)$ and a, b and c are constant, then:-

proof :- $\sigma^2_{ax+by+c} = a^2 \sigma^2_x + b^2 \sigma^2_y + 2ab\, \sigma_{xy}$

$\sigma^2_{ax+by+c} = E\left[(ax+by+c) - \mu_{ax+by+c}]^2 \right]$

$\mu_{ax+by+c} = E(ax+by+c) = aE(x) + bE(y) + c$
$= a\mu_x + b\mu_y + c$

$\sigma^2_{ax+by+c} = E\{ [a(x-\mu_x) + b(y-\mu_y)]^2 \}$
$= a^2 E[(x-\mu_x)^2] + b^2 E[(y-\mu_y)^2] +$
$2ab\, E[(x-\mu_x) \cancel{b} (y-\mu_y)]$
$= a^2\sigma^2_x + b^2 \sigma^2_y + 2ab\, \sigma_{xy}$

Ex (4.22) :- $\sigma^2_x = 2$ / $\sigma^2_y = 4$ / $\sigma_{xy} = -2$

Find the variance of the random variable $z = 3x - 4y + 8$

$\sigma^2_z = 9\sigma_x + 16\sigma_y + (2)(3)(-4)(-2) = 130$

Ex (4.23) :- $\sigma^2_x = 2$ $\sigma^2_y = 3$

Find the ~~rando~~ variance of the random variable :- $Z = 3x - 2y + 5$

$\sigma^2_z = 9\sigma^2_x + 4\sigma^2_y$
$= 9(2) + 4(3) = 30$

$(x, y) \rightarrow$ Independent
$\therefore \sigma_{xy} = 0$