ElCoM
ELECTRICAL COMPUTER MECHATRONICS

www.elcom-hu.com



دوسية إلكم

تم اعدادها بواسطة:

قيس عبدالله

خط

بيان بركات

دوسية شرح مادة:

تفاضل وتكامل ١

شرح مفصل للمادة
مضافاً إليها أسئلة سنوات

إرادة
ثقة
تغيير

ElCoM ElCoM HU ElCoM

الاقترانات Function

* شو هيه الاقترانات ؟

هي علاقة بين المدخلات (inputs) والمخرجات (outputs) ويرمز للاقترانات بـ F( ) أو H( ) الخ ... .

* شو هيه المدخلات والمخرجات ؟

المدخلات :- هيه القيم التي تكون من بالاقتران وتسمى أيضاً بـ المجال (Domain) ويمكن أن يرمز لها بـ (X) .

المخرجات :- هي ناتج تعويض المدخلات وتسمى أيضا بالمدى (Range) ويرمز لها بـ (Y) .

* مثال على الاقترانات : $F(X) = X^2 + 1$

وهنا X هي المدخلات .

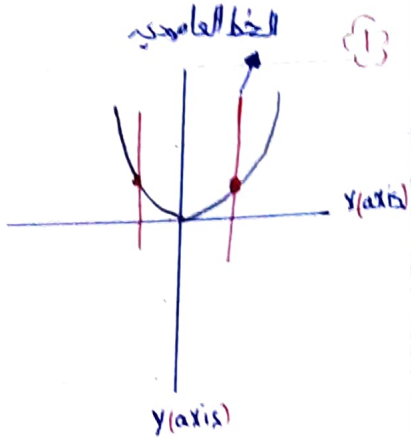
* هسا لحيف بدنا نعرف إلي قدامنا أقتران ولا لا ؟

لكل عنصر بالمجال (Domain) صورة واحدة بالمدى (Range) ،
طيب واذا كان للمجال أكثر من صورة ! هون بصير أسميها علاقة (relation)

* يلا نتعرف كيف نفرق بين العلاقة (relation) والاقتران (Function)
يتم التمييز بينهم عن طريق "أختبار الخط العامودي" وهو خط عامودي بنزعو موازي لمحور الصادات ، اذا قطع بنقطة فهو أقتران واذا بأكثر من نقطة فهو علاقة ، يلا ناخذ أمثلة ⟸

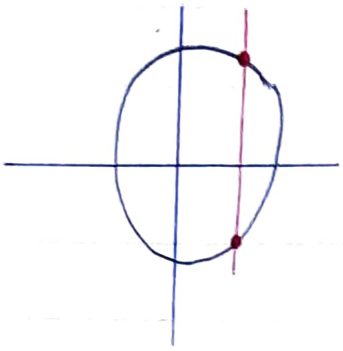
أمثلة على اختبار الخط العامودي: (Vertical line test)

١)



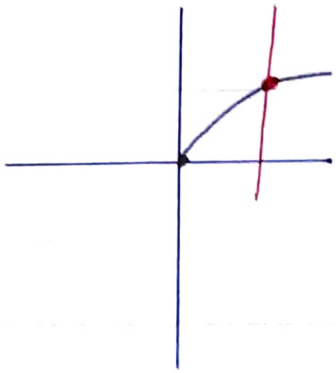
بهاي الرسمة قطع معنا الأقتران بنقطة وحدة فهو أقتران (Function).

٢)

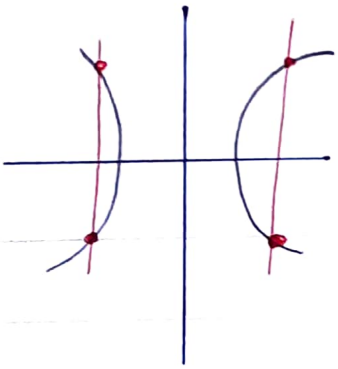


هون قطع معنا بنقطتين معناتها شو؟
أه علاقة (Relation).

٣)



هون قطع بنقطة معناتها (Function)



هو بأكتر من نقطة معناتها (Relation)

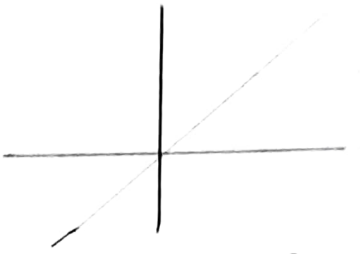
* قبل لندخل بالمادة في اشياء لازم نزاجها مشان نمشي بالمادة وكثير مهمين :-

* الاقترانات ← كثيرات الحدود (Polynomail)

(١) الاقتران الخطي Linear Fun

صيغته $y = F(x) = ax + b$

رسمته :-



Domain = $\mathbb{R}$

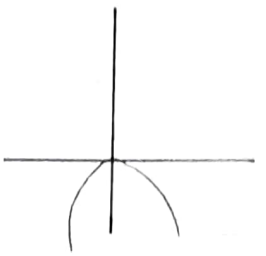
Range = $\mathbb{R}$

حيث ح مجموعة الاعداد الحقيقية

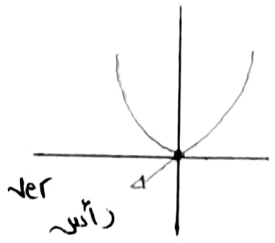
(٢) الاقتران التربيعي Quartiz Fun

صيغته $y = F(x) = ax^2 + bx + c$

رسمته :-



مفتوح لتسفل عندما $a < 0$



مفتوح لتعلى $a > 0$

Note :- نقطة الرأس بتجيبها من قانون ←

$\left(\frac{-b}{2a} \, , \, F\left(\frac{-b}{2a}\right) \right)$

Domain = $\mathbb{R}$

Range = بعديين ح
تتعلم نطلعو

(٣) الاقتران التكعيبي cubic Fun

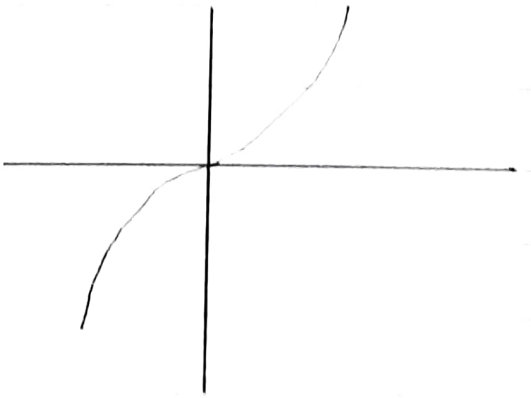
صيغته $y = F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Domain = $\mathbb{R}$

Range = $\mathbb{R}$

بنستنتج أنو اذا القوى فردية

بيكون Domain و Range → $\mathbb{R}$



* طيب شو رأيكم نثبت فكرة Domain و Range للمعادلة الفوقية ؟!
يلا ...

Q: Find the Domain and Rang For these Fun:-

(1) $y = 2 - x$ ⟶ Dom = R R = R

(2) $y = x^3 + 2$ ⟶ Dom = R R = R

* وهلأ يلا ناخذ Domain و Range لـ Polynomail إلي قوتها زوجية :-
- دائمًا لما يكون الأقواس على شكل $F(x) = ax^2 + bx + c$
بيكون الـ Dom ⟶ R أما الـ Range يلا ننظم كيف نطلعو :-

1) نجد رأس القطع $\left(\frac{-b}{2a}, F\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

2) بعد ما نطلع الرأس بنشوف اذا $a > 0$ بيكون المدى $\left[F\left(\frac{-b}{2a}\right), \infty\right)$
اذا $a < 0$ بيكون المدى $\left(-\infty, F\left(\frac{-b}{2a}\right)\right]$

Ex:- $F(x) = x^2 - 9$ Find Dom and Range ?

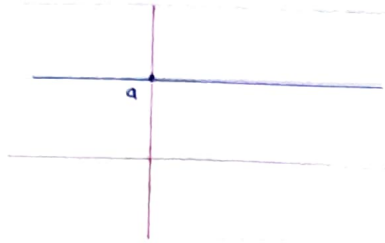
اول شي بنحدد a و b $a = 1$ $b = 0$

هلأ بنطلع رأس القطع $\frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2 \times 1} = 0$ بنعوضه بالأقواس $\frac{-b}{2a}$ بـ $F(0) = 0 - 9$

$F(0) = -9$ وبما إنو $a > 0$ اذًا Range = $[-9, \infty)$

و الـ Dom = R

* و بلا ناخذ الـ Dom و الـ Range للاقتران الثابت :-



$y = F(x) = a$ حيث a ثابت

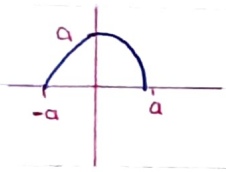
بيكون Domain = R

Range = {a}

ex : $y = 5$ Find Domain and Range :-

Domain = R Rang = {5}

* طيب واذا كان عنا جذر كيف نطلع Domain و Range ؟



(1) اذا كان الجذر على صيغة $y = F(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$

بيكون Dom = [-a, a] R = [0, a]

ex : $\sqrt{9 - x^2}$ Find the Domain and Range ?

$a^2 = 9 \rightarrow a = 3$

Domain = [-3 , 3] Range = [0, 3]

(2) اذا كان على صيغة $y = F(x) = -\sqrt{a^2 - x^2}$

بيكون Dom = [-a, a] والـ Range = [-a, 0]

(3) اذا كان على صيغة $y = F(x) = \sqrt{\text{اقتران}}$ بيكون الـ Dom $\text{اقتران} \geq 0$

والحد الثابت بالـ Dom بغوصو وبكون الـ Range

ex :- $F(x) = \sqrt{x - 5}$

$x - 5 \geq 0 \quad x \geq 5 \rightarrow [5, \infty)$ ← الحد الثابت بغوصو بالأقتران

اذا الـ Range $F(5) = \sqrt{5-5} = 0$ $[0, \infty)$

④ اذا كان عنا الجذر فردي يعني صيغته $\sqrt[n]{F(x)}$ حيث n: عدد فردي

بيكون دومينه دومين ما تحت الجذر Dom F(x)

اما بالنسبة للـ Range بتتعلمو بالدروس الجاي.

ex: Find Domain to $F(x) \quad \sqrt[3]{x^2+1}$

$\text{Dom } x^2+1 \longrightarrow \mathbb{R}$

* طيب واذا كان عنا أقواس لحسوبة $y = \frac{g(x)}{F(x)}$ ؟

بيكون Dom ← $D_{\text{البسط}} \cap D_{\text{المقام}} - \{\text{أصفار المقام}\}$

Range رح نتعلمو بعدين بالإ بينقرس.

ex: Find Domain $F(x) = \frac{x^2}{x-1}$

$D(x^2) \to R \qquad D(x-1) \to R \qquad \boxed{x=1} \quad x-1=0$ أصفار المقام

اذًا $\{\text{أصفار المقام}\} - D_{\text{البسط}} \cap D_{\text{المقام}} \leftarrow R \cap R - \{1\} \to R - \{1\}$

* أقواس القيمة المطلقة :-

بيكون Dom ← ما داخله Dom

Range من الرسم وهسا رح نتعلم كيف نرسمو

⟸

* رسم أقترانات القيمة المطلقة :-

أول شيء لازم نتعلم نعمله shift بالرسمة :-

1) $y = F(x) + c$ ⟵ shift للأعلى

2) $y = F(x) - c$ ⟵ shift للأسفل
(c خارج المطلقة)

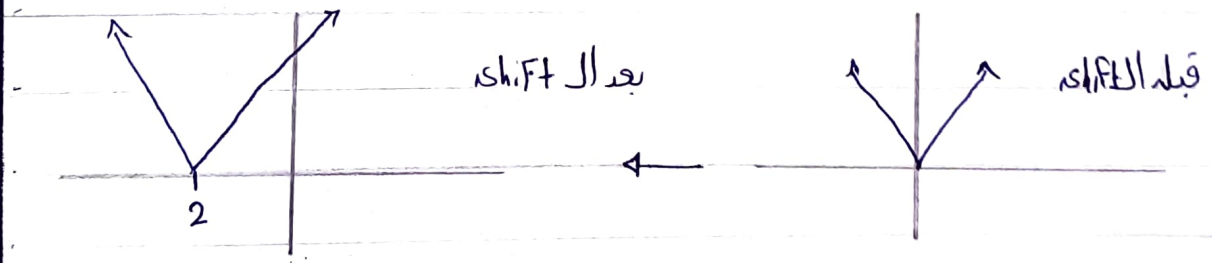
3) $y = |x + a|$ ⟵ shift لليسار

4) $y = |x - a|$ ⟵ shift لليمين
(a داخل المطلقة)

أمثلة :-

1) $y = |x + 2|$
(2 داخل المطلقة)

بما أنو العدد داخل المطلقة وأشارتو موجب بنعمله shift لليسار بمقدار 2

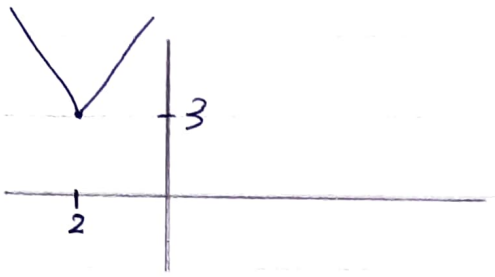


وهون الـ Range الأقترانات منه وين لوين على محور الصادات ؟
بنلاحظ انو بلشنا من الصفر للا نهاية
يعني الـ Range = $(0, \infty)$

كمان مثال على رسم المعادلة :

② $y = |x+2| + 3$

هون بدنا نعمل shift لليسار بمقدار 2 وبعدين shift للفوق بمقدار 3



هون الـ Rang بلشت من الـ 3 وطلعت لما لا نهاية

يعني Range = $(3, \infty)$

Note :- نفس الشي بينطبق على الجذر نفس اختلاف بشكل الرسمة ولكن نفس الأسلوب .

* أمثلة شاملة من الكتاب :-

* Find Domain and Range

① $F(x) = \sqrt{x-5}$

Dom $x - 5 \geq 0$ $x \geq 5$ $[5, \infty)$

Range $F(5) = \sqrt{5-5} = 0$ $0 \geq$ ~~∞~~ $[0, \infty)$

② $F(x) = 2 - 0.9x$

Dom = R Range = R كثير حدود درجة أولى

(3) $F(x) = x^2 - 2x - 1$

$Dom = R$

تربيعية

Range $\longrightarrow \left(\frac{-b}{2a}, F\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) \longrightarrow \left(\frac{2}{2}+1, F(1)\right)$

$(1,0)$ $\quad R = [0, \infty)$

(4) $F(x) = 2t + t^2$

$Dom = R$

تربيعية

Range $\Rightarrow \left[\frac{-2}{2}, F(-1)\right) \longrightarrow (1,0)$

$R = [-1, \infty)$

(5) $F(x) = \frac{4 - t^2}{2 - t}$ أقترانية كسرية

$Dom_{\text{البسط}} \cap Dom_{\text{المقام}} - \{\text{أصفار المقام}\}$ أصفار المقام $2 - t = 0$

$\boxed{t = 2}$

$R \cap R - \{2\}$

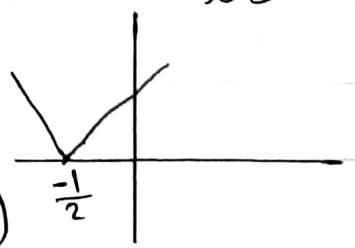
$R - \{2\}$ بعينة Rang

(6) $F(x) = |2x + 1|$ مطلقة

$Dom_{\text{مداخله}} = R$

Range من الرسم $\quad 2x + 1 = 0$

$\boxed{x = \frac{-1}{2}}$ $\quad R = (0, \infty)$



(7) $F(x) = \dfrac{2x + |x|}{x}$ كسر يه

$R \cap R - \{0\}$

$R - \{0\}$

(8) $F(x) = |x| - x$

Dom R

(9) $F(x) = \begin{cases} x+9 & , x < -3 \\ -2x & , |x| \leq 3 \\ -6 & , x > 3 \end{cases}$ حصانضه الطلقه $-3 \leq x \leq 3$

Dom R لتنهم الثلاث لمثيرات حدد

Rang R

Note للتذكير :- حصانضه الطلق والمراجعة

(1) $|x| \leq a \longrightarrow -a \leq x \leq a$

(2) $|x| \geq a \longrightarrow x > a$ or $x < a$

(3) $\sqrt{x^2} \longrightarrow |x|$

(4) $(\sqrt{x})^2 \longrightarrow x$

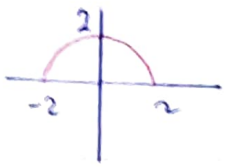
(5) $\left|\frac{x}{y}\right| \longrightarrow \frac{|x|}{|y|}$

(6) $|x * y| = |x| * |y|$

* Find the Domains

(1) $F(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Dom $[-2,2]$ Range $[0,2]$



(2) $F(x) = \frac{2x^3 - 5}{x^2 + 5 - 6}$

$R \cap R - \{2, -3\}$ $\quad x^2 + x - 6 = 0$

$(x-2)(x+3) = 0 \quad x = 2 \quad x = -3$

(3) $F(x) = \sqrt[3]{2t - 1}$

دومين مجذر فرد $D = R$

(4) $F(x) = \sqrt{3 - x} - \sqrt{2 + x}$

بهاد السؤال لازم نعمل تقاطع $(\cap)$ مشان ناخذ الفترة المشتركة فقط

ملحظة يجوز كسر مع كسر أو كسر مع جذر ..

$D_{\sqrt{3-x}} \cap D_{\sqrt{2+x}} \Longrightarrow (-\infty, 3] \cap [-2, \infty)$

$\Rightarrow D = [-2, 3]$

(5) $F(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-5x}}$

جذر زوجي ولسر اذاً $D_{\text{البسط}} \cap D_{\text{المقام}} - \{\text{أصفار المقام}\}$

ما فيه أسهل من طريقة أنو أحسبها جذر الزوجي ما لازم يكون تحته إشارة سالب فبدرسه إشارة :-

$x^2 - 5x = 0 \rightarrow x = 6 \quad x = 5$



$D = (-\infty, 0) \cup (5, \infty)$

مفتوحة لانو 5 و 0 أصفار مقام

⇑ هاي الطريقة تستخدم لما يكون جذر زوجي وتحته تربيعي .

(6) $F(x) = \frac{x+1}{1 + \frac{1}{x+1}}$

$Dom(x+1) = \mathbb{R}$ $\quad Dom \frac{1}{x+1} = \mathbb{R} - \{-1\}$

$Dom\ 1 + \frac{1}{x+1} \Rightarrow 1 + \frac{1}{x+1} = 0 \rightarrow \frac{1}{x+1} = -1$

$\rightarrow -x - 1 = 1 \rightarrow x = -2$

$D_{\text{البسط}} \cap D_{\text{المقام}} - \{\text{أصفار المقام}\}$ $\quad \mathbb{R} \cap \mathbb{R} - \{-2, -1\}$

$D = \mathbb{R} - \{-2, -1\}$

أسئلة سنوات الحل تحلوها :-

(1) the range of $g(x) = x^2 - 4x + 5$ is ?

(2) the range of $g(x) = -x^2 + 2x - 5$ is ?

(3) the Domain of $F(x) = \frac{x}{|x-1|-1}$ is ?

(4) the Domain of $F(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$ is ?

(5) the Range of $F(x) = 9 + \sqrt{9-x^2}$ is ?

(6) the Domain of $F(x) = \sqrt{2-\sqrt{x}}$ is ?

(Composition of Function تركيب الاقترانات)

* عندك بكون أقترانين g و f الاقتران المركب بينهم بكون كل صيغة

$F(g(x)) = (F \circ g)(x)$ ⟸

هاي معناها بعد وتلفظ Circle

* الدومين الجديد للاقتران المركب بنوجده عن طريق :-

$D_{(F \circ g)} \cap D_g$

Ex :

1) $F(x) = \sqrt{x}$ $\quad g(x) = \sqrt{2-x}$

Find ① $(F \circ g)(x)$ & Domain :-

الحل :- $F(g(x)) = \sqrt{2-x}$

Dom $\sqrt{2-x}$ = $2 - x \geq 0$

$x \leq 2$

$x \in (-\infty, 2]$ D و نفس الـ $g(x)$

② Domain $(g \circ F)(x)$

$g(F(x)) = \sqrt{2-\sqrt{x}}$

D $\sqrt{2-\sqrt{x}}$ $\longrightarrow$ $2 - \sqrt{x} \geq 0$

$2 \geq \sqrt{x}$

$4 \geq x$ $\Rightarrow$

D $F(x)$ $\longrightarrow$ $[0, \infty)$

$Dom_{(g \circ F)} \cap Dom_{F(x)} = [0, 4]$

أسئلة من الكتاب :-

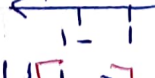
هاهو شرح تركيب اقترانات بس بدهم الـ Dom للطرفين وأعتبروها مراجعة .

① $F(x) = \sqrt{2-x}$ $\quad g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

A $(F \pm g)(x) = \sqrt{2-x} \pm \sqrt{x^2-1}$

$D_F \cap D_g$

$D_F \longrightarrow 3 - x \geq 0 \rightarrow 3 \geq 0$ $\quad [0, 3]$

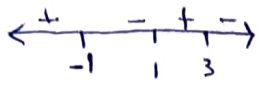
$D_g \longrightarrow x^2 - 1 \geq 0 \longrightarrow$  $\quad [1, \infty)$, $(-\infty, -1]$

$D_{F+g} = (-\infty, 1] \cup [1, 3]$

(b) $(F*g)(x) \overset{\text{الحل}}{=} \sqrt{(3-x)(x^2-1)}$

$(3-x)(x^2-1) \geq 0$

$3-x=0 \quad x^2-1=0 \quad x=3 \quad x=1 \quad x=-1$



$D_{F*g} = (-\infty, -1] \cup [1, 3]$

(c) $(F/g)(x)$

$= \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x^2-1}}$ $\quad D_F \cap D_g - \{\text{أصفار المقام}\}$

$(-\infty, 3] \cap (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

$D_{F/g} = (-\infty, -1) \cup (1, 3]$

(2) $F(x) = x^2-1 \qquad g(x) = 2x+1$

a $Fog(x) \overset{\text{الحل}}{=} F(g(x)) = (2x+1)^2 - 1$

$Dom = R$

h.w b $g \circ F(x)$ c $FOF(x)$ d $gog(x)$

(3) $F(x) = x + \frac{1}{x} \qquad g(x) = \frac{x+1}{x+2}$

a $Fog(x) = x + \frac{x+2}{x+1}$ Notes $\frac{1}{\frac{x+1}{x+2}}$ عوضت بعبية قلبت

$D_{Fog} \cap D_g \rightarrow R-\{-1\} \cap R-\{-2\} \rightarrow D_{Fog} = R-\{-1, -2\}$

* فك تركيب الاقترانات Decomposition of Fun

- لوكان عندك أقواس وبدك تفك تركيبه بدك تفرض أشيه g(x) وأشي F(x)

أسئلة من الكتاب :-

(1) $(2x+x^2)^4$

$F(x) = 2x + x^2 \qquad g(x) = x^4$

(2) $\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$

$F(x) = \frac{x}{x+1} \qquad g(x) = \sqrt[3]{x}$

(3) $\sqrt[3]{\frac{x}{1+x}}$

$F(x) = \sqrt[3]{x} \qquad g(x) = \frac{x}{x+1}$

منشان إجيك تاخدي الحل في أسئلة بالكتاب بصفحة (3-4) ، سؤال :-

(1) $F(x) = 4x^2 - 3, g(x) = \sqrt{4-x}$ Find the Domain of $(Fog)(x)$ is?

(2) $F(x) = \frac{8}{x-2}$ Find the Domain of $FoF(x)$?

(3) $F(x) = x^2+1 \quad g(x) = \sqrt{1-x}$ Find Domain of $Fog(x)$?

(4) هاي لازم أحلها $F(x)=x+1 \quad Fog(x)=2x+3 \quad$ Find $g(2)$?

$$Fog(x)=F(g(x))=2x+3$$

نعوض $g(x)$ في $F(x)$

$$g(x)+1=2x+3 \longrightarrow g(x)=2x+2$$

$$g(2)=4+2=\underline{6}$$

(5) $F(x)=3x-2 \quad Fog(x)=12x^2-6x+16$ Find $g(x)$?

(6) $g(x)=3x+5 \quad (Fog)=6x+11$ Find F ?

هون أعطانا $g(x)$ وبدو F بدنا نفرض $y=g(x)$

$$y=3x+5$$

$$F(3x+5)=6x+11$$

$$F(y)=6y+11$$

(7) $F(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}} \quad g(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ Find Dom $Fog(x)$?

(8) $F(3x)=\frac{x}{x^3+1}$ Find F ? نفس فكرة 6

(9) أحلها If Domain $=[1,4]$ then Domain $F(3x+4)$ is?

$F(x) \longrightarrow x=[1,4] \xrightarrow{\text{يعني}} 1\le x\le 4$

$F(3x+4) \longrightarrow 1\le 3x+4\le 4$

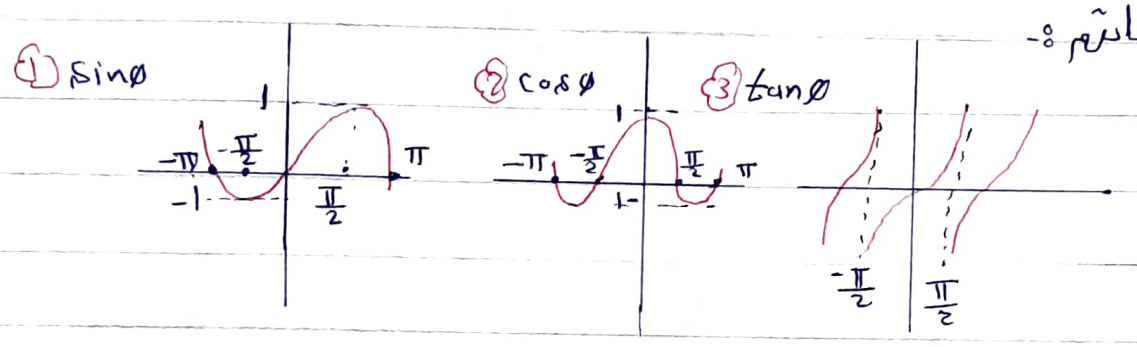
$$-3\le 3x\le 0$$

$$-1\le x\le 0 \longrightarrow [0,-1]$$ الجواب

الدوال المثلثية Trigonometric Fun

Function	Dom	Range
$\sin\theta$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$
$\cos\theta$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$
$\tan\theta$	$\mathbb{R}-\{\frac{\pi}{2}+n\pi\}$ $n=0,\pm1,\pm2\ldots$	$\mathbb{R}$

رسمانهم :-



ملاحظة :-

$\sin\theta$ → جاθ	$\cos\theta$ → جتاθ
$\tan\theta$ → ظاθ	$\sec\theta$ → قاθ
$\csc\theta$ → قتاθ	$\cot\theta$ → ظتاθ

مقلوباتهم

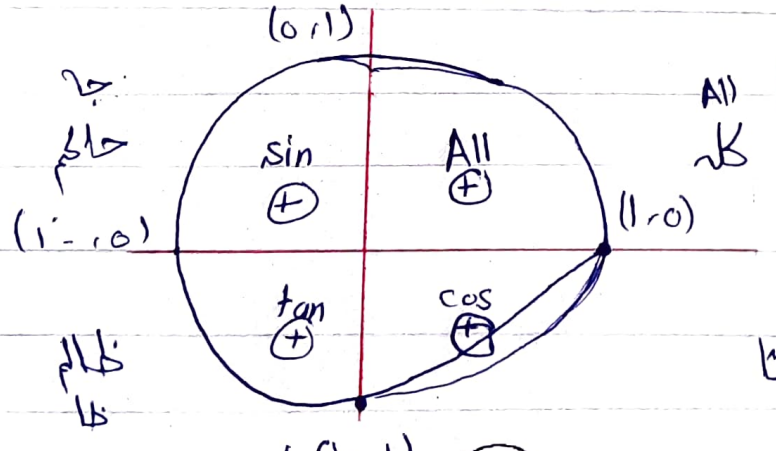
1) $\sin\theta \quad \frac{1}{\csc\theta}$

$\csc = \frac{1}{\sin\theta}$

2) $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

3) $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

دائرة الوحدة



* لو كان عندكم نقطة بتسميها (x_1, y_1)
حيث الاحداثي السيني لها (x_1) يمثل $\cos\theta$ حسب دائرة الوحدة فقط
والاحداثي الصادي (y_1) يمثل $\sin\theta$ حسب دائرة الوحدة فقط

* الزوايا المرجعية

	0°	30°	45°	60°	90°
	$\theta = 0$	$\theta = \frac{\pi}{6}$	$\theta = \frac{\pi}{4}$	$\theta = \frac{\pi}{3}$	$\theta = \frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف

* المتطابقات :-

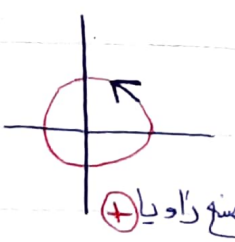
متطابقات فيثاغورس:
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$
$$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$$

متطابقات ضعف الزاوية:
$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$
$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

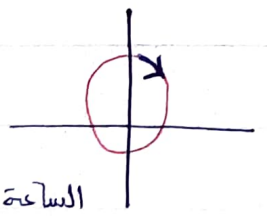
متطابقات نصف الزاوية:
$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

متطابقات الزاوية المركبة:
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

* ملاحظة :



هيك عطبه
عقارب الساعة ويتصفر راديان (+)



هيك مع عقارب
الساعة ويتصفر زوايا (-)

* Domain : دومين الدوال المثلثية دومين الزاوية

Range : رينج الدوال المثلثية نفسها بغض النظار عن الزاوية ممكن

يختلف بحالة أذا تقسم الدوال المثلثي أو تضربه أو تطرح أو تجمع عدد .

Ex: 1 Find Dom and Range ?

1) $y = 1 + \sin x$

Dom = R

Range ← بنحلها بطريقتين

طريقة (1) نعوض مكان sinx أقل قيمة لها و أعلى قيمة وهيك بيطلع الـ Range .

طريقة (2) ممكن تحصر بينه -1 و 1 وتحاول تصنع الدوال إلي بدك ياه .

ع حل على ط ٢ :

$$-1 \le \sin x \le 1$$

$$0 \le 1 + \sin x \le 2$$

Rang $[0, 2]$

2) $y = 3 + \cos 2t$

Dom = R

Range ع حل على أول طريقة

أعلى قيمة $y = 3 + 1$ $y = 4$ نعوض مكان cos $= 1$

أقل قيمة $y = 3 - 1$ $y = 2$ ونعوض $= -1$

Range $[2, 4]$

③ $\sin\left(\frac{3x}{1+x}\right)$

Dom → $R - \{-1\}$ Ran → $[-1, 1]$

④ $y = \frac{\sin 2x}{1 + \sin 2x}$ $x \in [0, \pi]$

$R \cap R - \{1 + \sin 2x = 0\}$

$\sin 2x = -1$

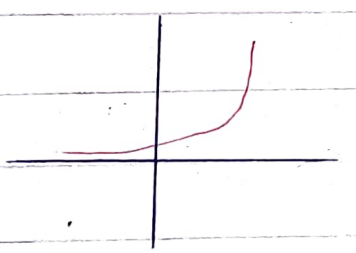
$2x = \frac{3\pi}{2}$

$x = \frac{3\pi}{4}$

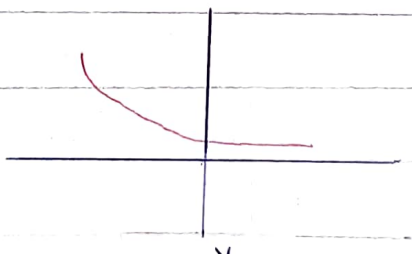
$Dom = R - \left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$

الأقتران الأسي (Expanential Fun)

رسمانه :



$y = b^x \Rightarrow b > 1$



$y = b^x \Rightarrow b \in (0, 1)$

$b \in R^+$

الدوال الأسية + خصائصها :-

1. $a^x * a^y = a^{x+y}$
2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3. $(a^x)^y = a^{x*y}$
4. $(ba)^x = b^x a^x$
5. $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$
6. $a^0 = 1$
7. $a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$

* دومينه :- Dom الأس نفسه Dom الأساس

Dom الأقتران

* رينجه :- من خلال الرسم وأثبته shift

Range $(0, \infty)$

Ex :- Find Domain ?

1. $F(x) = 3^{\sqrt{x^2-4}}$

$x^2 - 4 \geq 0 \quad = Dom = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

2. $F(x) = \frac{1}{e^x - e^{2x}}$

$Dom \; R \cap R - \{e^x - e^{2x} = 0\}$

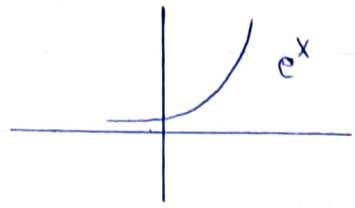
$e^x - e^{2x} = 0 \longrightarrow e^x(1 - e^x) = 0$

$e^x \neq 0 \quad e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

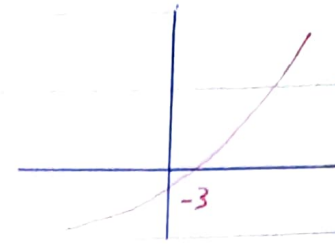
$Dom = R - \{0\}$

Ex : Find Range ?

(1) $e^x - 3$



بعد shift →



Range = $(-3, \infty)$

* سنوات على المثلثية :-

(1) The range of $F(x) = -1 + 3\sin x$ is ?

(2) The range of $F(x) = -3\sin^2 x$ is ?

(3) The range of $F(x) = \frac{5}{3 - \cos(2x)}$ is ?

* أسئلة على المثلثية والأسية :-

* Find Domain and Range For :-

[1] $F(x) = 7 + \sin x + |\sin x|$

[2]

[3] Find the Domain For $F(x) = (x-2)^{\frac{1}{4-x}}$?

$b > 0 - \{b = 1\}$ ← الأساس دومينه

$x - 2 > 0 - \{x - 2 = 1\}$

$(2, \infty) - \{3\}$

بناخد المشترك ← دومينه الأس $R - \{\pm 3\}$

$\text{Dom } F(x) = (2, \infty) - \{3\}$

[4] Find the Domain of $F(x) = \sin\sqrt{32 - 2x^2}$?

الدّوالّ الزوجية والفردية والتماثل :-

Even and odd and symmetry :-

* لمعرفة إذا الدّوال even أو odd تقوم بتعويض $(-X)$ بالدّوال :-

$F(-X) = F(X)$ Even Function إذًا يكون الدّوال

$F(-X) = -F(X)$ odd Function

- يجب معرفة :-

{1} الجمع والطرح $F(X) \pm g(X)$

$Even \pm Even = Even$

$odd \pm odd = odd$

$odd \pm Even = Neither$

$even \pm odd = Neither$ ← يعني لـ Even ولـ odd

{2} الضرب والقسمة

$Even * Even = Even$

$odd * odd = Even$

$Even * odd = odd$

$\frac{odd}{odd} = Even$

$\frac{Even}{Even} = Even$

$\frac{Even}{odd} = odd$ ، $\frac{odd}{Even} = odd$

تعامل even على أنها أشارة موجبة والـ odd أشارة سالبة

(3) أقترانات مثلثية

$\sin(-x) = -\sin x$ odd

$\cos(-x) = \cos x$ Even

$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{odd}{Even} = odd$

$\cot(-x) = -\cot(x)$ odd

$\sec(-x) = \frac{1}{\cos(-x)}$ Even

$\csc(-x) = \frac{1}{\sin(-x)}$ odd

* يلا ناخذ أمثلة ؛

- Classify the Function as even or odd or neither ?

(1) $F(x) = \frac{x}{x^2+1}$

$F(-x) = \frac{-f(x)}{x^2+1}$ ⟹ بالتالي $F(-x) = -F(x)$ odd Function

(2) $F(x) = \frac{x^2}{x^4+1}$

$F(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^4+1} = \frac{x^2}{x^4+1}$ هذا زيه هو ⟹ بالتالي $F(-x) = F(x)$

Even

(3) $F(x) = \frac{x}{x+1}$

نأخذ السالب عامل مشترك من المقام

$F(-x) = \frac{-x}{-x+1}$ ⟹ $F(-x) = \frac{-x}{-(x-1)}$ ⟹ $F(x) = \frac{x}{x-1}$

Neither

* هون ما طلع معنا لا سالب مفقود بالأقترانات

[4] $F(x) = x|x|$

$F(-x) = -x|-x|$

$F(-x) = -x|x|$ $\quad F(-x) = -F(x)$ odd

(5) $F(x) = 1 + 3x^2 - x^4$

$F(-x) = 1 + 3(-x)^2 - (-x)^4$

$F(-x) = 1 + 3x^2 - x^4$ $\quad F(-x) = F(x)$ Even

(6) $F(x) = 1 + 3x^3 - x^5$

$F(-x) = 1 + 3(-x)^3 - (-x)^5$

$F(-x) = -(1 + 3x^3 - x^5)$ Neither

لا عامل مشترك

(7) $F(x) = x^5 + x$

$F(-x) = -x^5 - x$

$F(-x) = -(x^5 + x)$ ⟶ $F(-x) = -F(x)$ odd

(8) $F(x) = 2x - x^2$

$F(-x) = -2x - x^2$

$F(-x) = -(2x + x)$ Neither

(9) $F(x) = 1 - x^4$

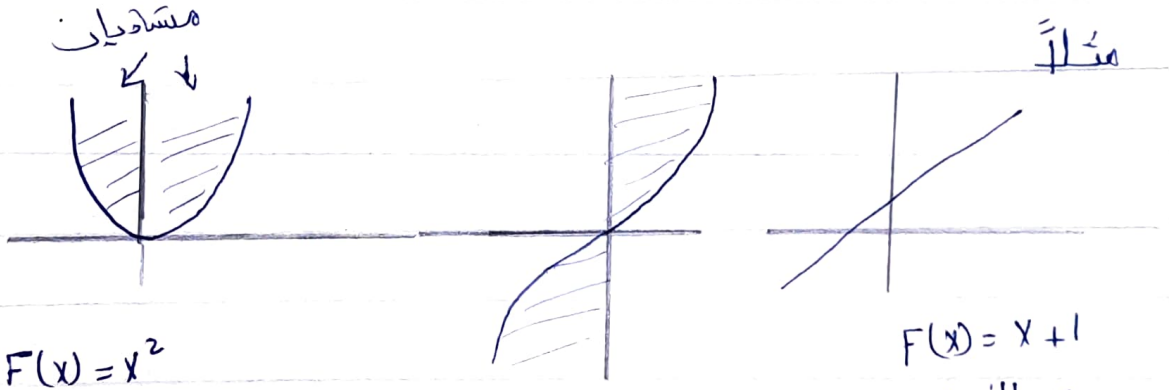
$F(-x) = 1 - x^4$ $\quad F(-x) = F(x)$ Even

* التماثل : symmetry

(1) Even Function : symmetric about y-axis
(2) odd Function : symmetric about origin (نقطة الأصل)
(3) neither even and odd : symmetric neither about y-axis or origin

بالمختصر :- أقران الـ Even بكونه متماثل حوالين y-axis
- وأقران الـ odd يكون متماثل حوالين نقطة الأصل (0,0)
- والي قران إلي لا هو ولا هو odd ما يكون متماثل حوالين نقطة الأصل ولا y-axis .

مثلاً



$F(x) = x^2$
Symetric about y-axis

$F(x) = x^3$
Symetric about origin

$F(x) = x + 1$
neither symetri about y-axis or origin

3- Symetry and odd and Even تماثل وفردي وزوجي

1 classify the Funciton Even or odd or neither?

A) $F(x) = x^2 + 4$

B) $F(x) = 2x - 1$

C) $F(x) = \frac{x^5 - x}{5 + 3x^2}$

D) $F(x) = 1 + \sin x$

E) $F(x) = x^2 + 3x$

F) $F(x) = 2 - 3x$

G) $F(x) = 1 + 2\cos v$

K) $F(x) = \frac{x^3 - x}{1 + v^2}$

2 where the Following relation symetric about?

1) t

2) $y = \sin x \cos y$

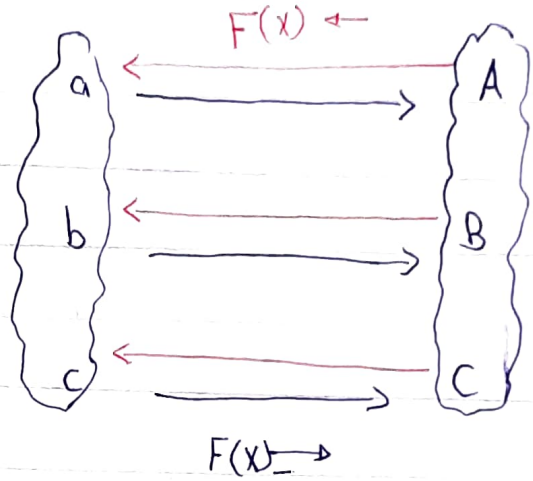
3) $y^3 = |x| - 5$

4) $\csc y = \frac{\sin x}{1 + \sin y^2}$

الاقتران العكسي : Inverse Function

- هيا لو كان عندك أقتران $F(9) = 3$ مثلاً الإقتران العكسي إلو $\bar{F}(3) = 9$ لاحظ كيفه قلبنا

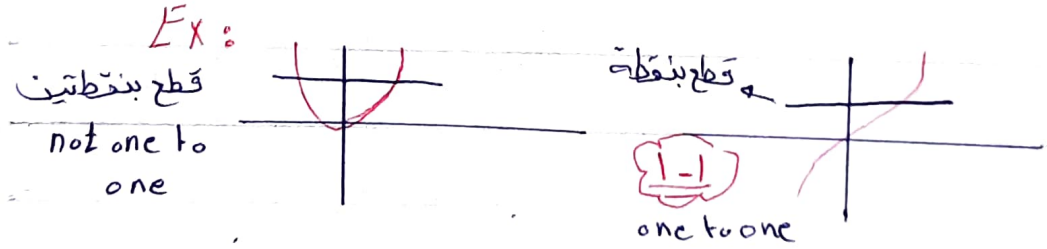
- يرمز للإقتران العكسي $\bar{F}(x)$ ولكن $\left(\frac{1}{F(x)} \neq \bar{F}(x)\right)$



- طريقة إيجاد الدومين لإقتران ؟

1) معرفة إذا كان (1-1) one to one ؟ - بنرسم خط أفقي لدرس يقطع الاقتران بنقطة وحدة فقط .

Ex :



(2) هسا لو عندك أقترانه بكونه معادلة y بدلالة x $\{y(x)\}$ بس الإقترانه العكسيه بكونه x بدلالة y $\{x(y)\}$.

نستنتج :- Dom F(x) ⟵ Rang F̄(x)

Rang F(x) ⟵ Dom F̄(x)

Ex: Find the F̄(x) For:

$$F(x) = \frac{x+3}{x+2}$$

[1] بنحط مكان F(x) ← y

$$y = \frac{x+3}{x+2}$$

[2] بنخلي x موضع القانون

$y(x+2) = x+3$

- بنجمع الأقواس جنب بعض

$yx + 2y = x + 3$

- بنخلي x عامل مشترك

$yx - x = 3 - 2y$

$x(y-1) = 3-2y \longrightarrow x = \frac{y-1}{3-2y}$

[3] بنحط مكان x ← F̄(x) ومكان y ← x

$$F̄(x) = \frac{y-1}{3-2y} \qquad F̄(x) = \frac{x-1}{3-2x}$$

Ex: $F(x) = x^2 - 8x + 2 \qquad x > 4$?

$y = x^2 - 8x + 2$

$y - 2 = x^2 - 8x$ ← هون بلاحظ انو صعب نطلع x

بنضيف وبنطرح $(\frac{-8}{2})^2$

أكمال مربع : $y - 2 = x^2 - 8x + 16 - 16 \longrightarrow y + 14 = (x-4)^2$

يتبع

$\sqrt{y+14} = |x-4|$

هو نه حطالنا بالسؤال $x > 4$ فبناخد الموجب

$\sqrt{y+14} = x-4 \longrightarrow y = \sqrt{y+14}+4 \longrightarrow \bar{F}(x) = \sqrt{y+14}+4$

$\longrightarrow \bar{F}(x) = \sqrt{x+14}+4$

(3) $F(x) = x^2+1 \quad x \geq 0$

$y = x^2+1$

$x = \pm\sqrt{y-1} \longrightarrow x = \sqrt{y-1} \longrightarrow \bar{F}(x) = \sqrt{y-1}$

بناخد الموجب

$\longrightarrow \bar{F}(x) = \sqrt{x-1}$

Ex: Find Dom and Range $(F, \bar{F})$, $F(x) = \frac{x+3}{x+2}$?

$\text{Dom } F(x) = R \cap R - \{x+2=0\} \longrightarrow R - \{-2\}$

$\text{Dom } F(x) = \text{Range } \bar{F}(x) = R - \{-2\}$

Rang $F(x)$ ← لازم نلاقي التغييرين

$y = \frac{x+3}{x+2} \qquad \bar{F}(x) = \frac{3-2x}{x-1}$ ← $\text{Dom } \bar{F}(x) = R - \{1\}$

$\text{Rang } F(x) = R - \{1\}$

$\text{Rang } \bar{F}(x) = \text{Dom } \bar{F}(x) = R - \{1\}$

الدوال اللوغاريتمية: Logarithic Fun



* لإيجاد الدومين له بخطي ماد اخله > 0
الرينج = ℝ ونجد الأنفيرس له

* Note :- $\log_e^x = \ln x$

* خصائص اللوغاريتمية :-

(1) $\log_b(ac) = \log_b^a + \log_b^c$ (2) $\log_b^{\frac{a}{c}} = \log_b a - \log_b c$

(3) $\log_b^{\frac{1}{c}} = \log_b 1 - \log_b c$ (4) $\log_b^{r^a} = a\log_b^r$

بساوي صفر

(5) $\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c b}$ (6) $\log_b^1 = 0$ (7) $\log_b^b = 1$

(8) $e^{\ln x} = x$ (9) $\ln e = 1$ (10) $b^{\log_b^x} = x$

Ex:- Find Domain and Range :-

(1) $F(x) = \log_5^{3x-1} - 1$

Dom → $3x - 1 > 0 \quad x > \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{3}, \infty$

Range →

$y = \log_5^{3x+1}$ $\quad 5^y = 5^{\log_5^{3x+1}}$ $\quad 5^y = 3x + 1$

$x = \frac{5^y + 1}{3}$ Rang → ℝ

(2) $F(x) = \ln(\ln x)$

Dom $\ln x > 0 \rightarrow x > 1 \;,\; x > 0$ $\quad Dom = (1, \infty)$

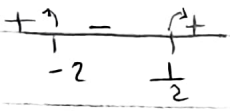
$\ln x = 0 \quad x = 1 \quad (1,\infty) \cap (0,\infty)$

Range $y = \ln(\ln x) \rightarrow e^y = e^{\ln(\ln x)} \rightarrow e^y = \ln x \rightarrow e^{e^y} = e^{\ln x}$

$x = e^{e^y} \rightarrow F(x) = e^{e^y} \rightarrow$ Range $= R$

(3) $F(x) = \ln\left(\frac{4x-2}{2+x}\right)$

Dom $\frac{4x-2}{2+x} > 0 \qquad Dom = (-\infty, -2) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$



Range $y = \ln\frac{4x-2}{2+x} \rightarrow e^y = \frac{4x-2}{2+x} \rightarrow x = \frac{2e^y+2}{4-e^y}$

$\rightarrow \bar{F}(x) = \frac{2e^x+2}{4-e^x}$

$R - \{4 - e^x = 0\} \qquad R - \{4 = e^x\} \qquad \ln 4 = \ln e^x \rightarrow \ln 4 = x$

Range $= R - \{\ln 4 = x\}$

الإقترانات المثلثية العكسية (invers trig Fun)

* ملاحظة الانعكاس بتركيب الإقترانات $X = (F \circ F)(X)$ ومحذوفة $(F \circ F)(X)$ و X

$X = (F \circ F)(X)$

	Dom	Range	
$\sin X$	$[-1,1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	odd
$\cos X$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	neither
$\tan X$	R	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	odd

* متطابقات الإنعكاس:

(1) $\cos(-x) = \pi - \cos(x)$

(2) $\cos(\frac{1}{x}) = \sec(x)$

(3) $\csc(-x) = \csc(x)$ odd

Ex: Find dom and Ran For $F(x) = 2 - \sin(3x+1)$

Dom

$-1 \le 3x+1 \le 1$

$-1 \quad -1 \quad -1$

$-2 \le 3x \le 0$

$\frac{-2}{3} \le x \le 0$

$x \in [\frac{-2}{3}, 0]$

Range

$-\frac{\pi}{2} \le \sin(3x+1) \le \frac{\pi}{2}$

$2 - \frac{\pi}{2} \le 2 - \sin(3x+1) \le 2 + \frac{\pi}{2}$

$y \in [2 - \frac{\pi}{2}, 2 + \frac{\pi}{2}]$

1 * $\sin(\sin x) = x \rightarrow x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

2 * $\sin(\sin x) = x \rightarrow x \in [-1,1]$

3 * $\cos(\cos x) = x \rightarrow x \in [0,\pi]$

4 * $\cos(\cos x) = x \rightarrow x \in [-1,1]$

* أخرتلت مستحيل x تطلع أجوبة قيمتهم.

* Find the exact value:-

1) $\sin^{-1}(\sin\frac{\pi}{4})$

(ضمن الفترة $\frac{\pi}{4}$)

إذاً $\sin^{-1}(\sin(\frac{\pi}{4})) = \frac{\pi}{4}$

2) $\sin^{-1}\sin(\frac{5\pi}{4})$

(موضعنة الفترة) بنجيب الزاوية المرجعية وبأي ربع وشو إشارة الاقتران بالربع إلي طالعلك

(1) $\frac{5\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{4}$

(2) الثالث (3) سالب

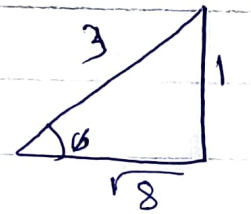
$-\sin^{-1}(\sin\frac{\pi}{4}) = -\frac{\pi}{4}$

3) $\tan(\sin^{-1}(\frac{-1}{3}))$

اذا الاقترانات مختلفة بنطلع السالب لبرا بعدين بنفرضه الداخلي ϕ.

$-\tan\sin^{-1}(\frac{1}{3}) \rightarrow \phi = \sin^{-1}\frac{1}{3} \rightarrow \sin\phi = \frac{1}{3} = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$

إذاً $-\tan\phi = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$



$-\tan\phi = \frac{1}{\sqrt{8}}$ $\quad \tan\phi = \frac{-1}{\sqrt{8}}$

بنشيلة إلو فرضنا وبنحط الفرضة

4) $\cos^{-1}(\frac{-1}{\sqrt{2}})$

$\therefore \pi - \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

سنوات شاملة لبرنامج

* Find the inverse For $\frac{x-3}{2x-1}$?

* the solution of Relation $\frac{(x-3)(x+2)}{x^3+x-2}\ln x = 0$?

* $\sin(\tan(2))$ Find the Exact value For it ?

* If $F(x) = x^3 + x - 2$, then $\bar{F}(0)$ is ?

$\bar{F}(0)$ ← بنرجعو F(x) ← $\bar{F}(y) = x$ $\quad F(x) = y$ ←

$F(x) = 0 \longrightarrow x^3 + x - 2 = 0$

$x = 1$

* Find the values of x such that $\log_x(12 - 2x^2) = 2$

هيك سؤال لو ماعرفت تحلو عوضه الدوائر .

$\log_x(12 - 2x^2) = 2$

حسب الضاهية $\quad \frac{\ln(12 - 2x^2)}{\ln x} = 2 \longrightarrow 2\ln x = \ln(12 - 2x^2) \longrightarrow$

$\ln x^{(2)} = \ln(12 - 2x^2) = \ln x^2$ اذا اللوغارتمين متساويين لنفس الاساس بتساوي ما داخلهم

$12 - 2x^2 = x^2$

$12 - 3x^2 = 0$

$3(4 - x^2) = 0$

$x = \pm 2$

* $F(x) = x^3 + 2x + 5$, $F^{-1}(5)$ ـــ Find ?

* $F(x) = 2x^3 + 5x + 3$ Find the value of x such that $F^{-1}(x) = 1$?

$F^{-1}(x) = 1$

$F(1) = 2(1)^3 + 5(1) + 3$

$F(1) = 10 \qquad x = 10$

* Determine $F(x)$ even or odd or neither?

(A) $\sin^{-1}(x)$

(B) $\cos^{-1}(x)$

* $F(x) = \frac{6x - 2}{3x + 1}$ Fin $F^{-1}(x)$?

* $\tan(\cos^{-1}(\frac{3}{5})) = ?$

* the soluition For the equation $\log_{11}^{x} + \log_{11}^{(x-10)} = 1$?

* $\cos(\tan^{-1}(2)) = ?$

* the exact value For $\sin(\tan^{-1}(\frac{4}{3}))$?

* $F(x) = x^3 + 2x + 14$ Find $F^{-1}(2)$?

* $F(x) = x - 5x^2$, $x \geq 1$ Find $\bar{F}(x)$?

لما أنت تربيعي ح تعمل أكثر من مرة

$$F(x) = x - 5x^2$$

$$\frac{-1}{5} * (y) = (x - 5x^2) * \frac{1}{5} \rightarrow \frac{-y}{5} = x^2 - \frac{x}{5}$$

$$\frac{1}{100} - \frac{y}{5} = x^2 - \frac{x}{5} + \frac{1}{100} \rightarrow \frac{1}{100} - \frac{y}{5} = (x - \frac{1}{10})^2$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{1}{100} - \frac{y}{5}} = x - \frac{1}{10} \rightarrow \bar{F}(x) = \frac{1}{10} + \sqrt{\frac{1}{100} - \frac{x}{5}}$$

* $F(x) = x^3 + 4x + 1$ $\bar{F}(c^3) = c$ then $c =$

$$\bar{F}(c^3) = c$$

$$F(c) = c^3$$

$$c^3 + 4c + 1 = c^3 \rightarrow 4c + 1 = 0$$

$$\boxed{c = \frac{-1}{4}}$$

* $3e^{4x} = 1$ Find the values of x ?

* $\cos(\bar{\cos}(\frac{\pi}{6}))$?

* $\sec(\bar{\cos}(x))$?

النهايات (Limits)

- النهايات تساعد على دراسة سلوك الاقترانات حول نقطة معينة.

* أول شيء إذا أعطاك حاصلة قسمة اقترانين وبدو $\lim_{x \to a} \frac{F(x)}{g(x)}$ ← العدد إلي بيدلو الـ (x)

بتعوض ذيله النهاية للاقترانين وتشوف شو طالع معك:

1. إذا طلع معك $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}}$ حاصلة قسمتهم جواب النهاية.
2. إذا طلع معك $\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}}$ الجواب صفر.
3. إذا طلع معك $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ هون رح نستخدم طرق وحدة أو 2 (1) التحليل. (2) ضرب مرافق (3) توحيد مقامات

Note:-

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (2) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

(3) $\lim_{x \to a} g(x) \pm F(x) = \lim_{x \to a} g(x) \pm \lim_{x \to a} F(x)$

(4) $\lim_{x \to a^+} F(x) = \lim_{x \to a^-} F(x) = \lim_{x \to a} F(x)$ شرط النهاية

(5) إذا كانت a ضمن الدومين للاقتران إلي بدك توجدله النهاية عندها x تؤول لـ a فإنه $\lim_{x \to a} F(x) = F(a)$

(6) $\lim_{x \to a} c = c$ ثابت ← c

(7) في الضرب والقسمة تدخل النهاية $\lim_{x \to a} F(x)\, g(x) = \lim_{x \to a} F(x) \lim_{x \to a} g(x)$

(8) $\lim_{x \to a} cF(x) = c \lim_{x \to a} F(x)$

* أمثلة من الكتاب :-

1) $\lim_{x \to 0} \cos(x + \sin x)$

نعوض العدد

$\cos(0 + \sin 0) = \cos(0) = 1$

طلع عدد معناها جواب النهاية = 1

$\lim_{x \to 0} \cos(x + \sin x) = 1$

2) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3}{x^2 + 2x - 3} = \frac{0}{12} = 0$

$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3}{x^2 + 2x - 3} = 0$

3) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3} = \frac{0}{0}$

بما أنو طلع $\frac{0}{0}$ رح نحتاج لطريقة التحليل .

$\lim_{x \to -3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x \to -3} \frac{x-3}{x-1}$

نعوض $= \frac{-6}{-9} = \boxed{\frac{3}{2}}$

4) $\lim_{x \to 0} \frac{(x-1)^3 + 1}{x} = \frac{0 - 1 + 1}{0} = \frac{0}{0}$

* هون بنفك التكعيب

$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(x^2 - 3x + 3)}{x}$

يتبع

$$\lim_{x \to 0} x^2 - 3x + 3 = 0 - 0 + 3 = 3$$

Note: $(a \mp b) = a^3 \mp 3a^2b + 3ab^2 \mp b^3$

(5) $$\lim_{x \to 4} \frac{4-x}{|4-x|} = \frac{0}{0}$$

هون لازم نتنبه للإشارة من اليمين والسار

$4-x = 4-4=0$ (1) أول شي بنحوف ذيل النهاية بالمطلوب اذا صفر بنعمل دراسة إشارة

(2) بندرس إشارة حوالين ذيل النهاية



$$\lim_{x \to 4^+} \frac{4-x}{4-x} = +1 \qquad \lim_{x \to 4^+} \frac{4-x}{x-4} = -1$$

~~$\lim_{x \to 4}$~~

$\lim_{x \to 4} F(x)$ d.n.e غير موجودة

(6) $$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+6} - x}{x^3 - 3x^2} = \frac{0}{0}$$

ضرب مرافقة

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+6} - x}{x^3 - 3x^2} * \frac{\sqrt{x+6} + x}{\sqrt{x+6} + x} \to 6$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x+6-x^2}{x^3-3x^2} = \lim_{x \to 3} \frac{x+6-x^2}{6x^2(x-3)} = \lim_{x \to 3} \frac{-(x-3)(x+2)}{6x^2(x-3)}$$

$$= -\frac{5}{54}$$

(7) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{0} \not\equiv \frac{1}{0} = \frac{0+0}{0} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)(x-2)}$

توحيد المقامات:

$= \lim_{x\to 1} \frac{x-2}{(x-1)(x-2)} + \frac{1}{(x-1)(x-2)}$

$\lim_{x\to 1} \frac{x-2+1}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{1-2} = -1$

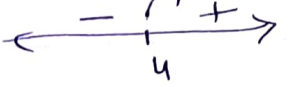
* Note :- في حالة وجود جذر اذا اعوضت ذيل الصفايح وطلع سالب يكون غ موجودة dne

وإذا طلع صفر نها $\neq$ نها
$\bar{a}\to r$ $\dot{a}\to r$

وإذا طلب منه جهة معينة يدتاتي له.
موجب ٧ موجودة = 0

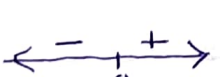
(8) Ex:- $\lim_{x\to 4^+} \sqrt{2x-8} = \sqrt{0}$

غ موجودة | موجودة



$\lim_{x\to 4^+}$ موجب ٧ = 0

(9) $F(x) = \frac{x-1}{|x|-1} = \frac{0}{0}$ Find $\lim_{x\to 1} F(x)$



$\begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$ نعيد تعريف $\longrightarrow$ $\begin{cases} \frac{x-1}{x-1}, & x > 0 \\ \frac{x-1}{x-1}, & x \leq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x \leq 0 \end{cases}$ $\lim_{x\to 1} F(x) =$ غ

الحالة الرابعة من النهايات :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{عدد}}{0}$$

- يكون جوابها إما ∞ أو $-\infty$ أو D.De

* طريقة الحل :- [1] نوحد مقام نتأكد أن ا عدد / 0

[2] ندرس إشارة $\frac{f(x)}{g(x)}$ عند ذيله التهاية $x = a$

[3] الجواب يكون

$\infty \Leftarrow$ + | + (عند a)

$-\infty \Leftarrow$ − | − (عند a)

d.n.e $\Leftarrow$ − | + (عند a)

Ex:- 1 $$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x}}{(x-a)^2}$$

$$= \frac{3}{0}$$

ندرس إشارة + | + (عند a) ندرس إشارة عن طريق تعويض قيم أكبر من a وأصغر من a

$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x}}{(x-a)^2} = \infty$$

2 $$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - a}{x^2 + 2x - 3} = \frac{-8}{0}$$

طلبة منا لميت

+ | − (عند 1)

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - a}{x^3 + 2x - 3} = -\infty$$

V.A

الخط العامودي المتقارب : Vertical asymptote

طريقة إيجاده :

(1) نختصر أي شيء مشترك بين البسط والمقام .

(2) قيم (Vertical) بتكون قيم أصفار المقام بعد الاختصار .

Ex : 1 $\frac{x^2+1}{3x-2x^2}$

لا يوجد شيء مشترك بين البسط والمقام

$3x-2x^2=0$

$x=0 \quad x=\frac{3}{2}$

2 $F(x)=\frac{x-1}{|x|-1}$

$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x \leq 0 \end{cases}$

$F(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x-1} & x \geq 0 \\ \frac{x-1}{-x-1} & x \leq 0 \end{cases}$

للمقام $(0,\infty]$ لايوجد Vertical asy

للمقام $[-\infty,0)$ يوجد .

$-x-1=0$

$x=-1$

Note : ① $\tan x$ لها عدد لا نهائي من V.A ② $\log_b^x$ لها V.A واحد عند $x=0$.

Limits at infinity النهايات عند ما لا نهاية

وهي الحالة (5) من النهايات إذي عندما x تؤول لـ ∞ أو $-\infty$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Note: [1] $\frac{\infty}{\text{عدد}} = \infty$ [2] $\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$

[3] $a^{\infty} = \infty$ $a^{-\infty} = 0$

[4] معكنة نستفيد من رسمات الاقترانات

مثلاً $\frac{1}{x}$

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ رايحة للصفر و

نهايات بسيطة مهمة

(A) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

(B) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

(C) $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$

(D) $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

(E) $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

(F) $\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$

(G) $\lim_{x \to \infty} \tan(x) = \frac{\pi}{2}$

(K) $\lim_{x \to -\infty} \tan(x) = -\frac{\pi}{2}$

* لما يكون عندنا كثير حدود نبدأ خذ الأس الأعلى مع الرقم (معاملاته)

Ex: (1) $\lim_{x \to -\infty} 4x^2 - x^5 + 3x^8$

Sol: $\lim_{x \to -\infty} 3x^8 = \infty$

(2) $\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 - 1}{2x - x^5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2}{-x^5} = \frac{4}{-(-\infty)^3} = \frac{4}{\infty} = 0$

دائماً عندما يكون درجة المقام أكبر من البسط يكون الناتج صفر

(3) $\lim_{x \to \infty} \frac{7x^7 - 3x + 1}{4x^2 + 5}$

Sol: $\lim_{x \to \infty} \frac{7x^7}{4x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{7x^5}{4} = \frac{7}{4}(\infty)^5 = \infty$

عندما يكون درجة البسط أكبر من درجة المقام يكون الناتج ∞ أو $-\infty$

(4) $\lim_{x \to \infty} \frac{3x - 2x^2}{4x^2 + 5} = \lim_{x \to \infty} \frac{-2x^2}{4x^2} = \frac{-1}{2}$

إذا درجة المقام تساوي البسط يكون الناتج معاملات أكبر أس بالمقام والبسط.

في حالة e^x : (1) إذا طلب $x \to -\infty$ نأخذ أكبر أس سالب
(2) إذا طلب $x \to \infty$ نأخذ أكبر أس موجب

Ex: $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{4x} - 5e^{-7x}}{3e^{3x} + 5e^{4x}}$

Sol: $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{4x}}{5e^{4x}} = \frac{1}{5}$

Ex: $\lim_{x\to-\infty} \frac{5e^{-2x} - 3e^{2x}}{e^{2x} - 4e^{-3x}}$

Sol: $= \lim_{x\to-\infty} \frac{5e^{-2x}}{-4e^{-3x}} = -\frac{5}{4}e^{x} = \infty$

Ex: $\lim_{x\to-\infty} \frac{3e^{x} - 2e^{-x}}{e^{-x} + e^{x}}$

Sol: $\lim_{x\to-\infty} \frac{-2e^{-x}}{e^{-x}} = -2$

في حالة الجذور: نأخذ أكبر أس تحت الجذر مع الجذر

Ex: $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{36x^2 - 4x}}{x+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{36x^2}}{x} =$

نعوض داخل الطلقة
إذا سالب نحط سالب

$\lim_{x\to-\infty} \frac{6|x|}{x} = \frac{-6x}{x} = -6$

التقارب الأفقي Horizontal asymptote

طريقة إيجاده : عن طريق حد $y = \lim_{x \to \pm\infty} F(x)$ =

اذا ما ساوت عدد وساوت ∞ أو $-\infty$ أو d.n.e هذا يعني لا يوجد (H.A).

1) $F(x) = \dfrac{\sqrt{x^4 - 5}}{x+1}$

Sol:

(A) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^4-5}}{x+1} \longrightarrow \lim_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^4}}{x} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim_{x \to \infty} x$

$= \boxed{\infty}$

(B) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^4-5}}{x+1} \longrightarrow \lim_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^4}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x} = \boxed{-\infty}$

∴ There is no H.A

2) $F(x) = \dfrac{3x-5}{8x+3}$

$\lim_{x \to \infty} \dfrac{3x-5}{8x+3} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{3x}{8x} = \boxed{\dfrac{3}{8}}$

$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{3x-5}{8x+3} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{3x}{8x} = \boxed{\dfrac{3}{8}}$ ⟶ H.A $= \dfrac{3}{8}$

3) $F(x) = \frac{1}{3}\tan(e^x)$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{3}\tan(e^x) \longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3}\tan(e^{\infty}) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3}\tan\infty = \boxed{\frac{\pi}{6}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{3}\tan(e^x) \longrightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{3}\tan(e^{-\infty}) = \boxed{0}$$

$$\boxed{H.A = \frac{\pi}{6}}$$

4) $F(x) = \sqrt{x^2-3x} - x$ اليه زي هيك جذر تربيعي بنضربها بالمرافق.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-3x} - x}{1} * \frac{\sqrt{x^2-3x} + x}{\sqrt{x^2-3x} + x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x-x^2}{\sqrt{x^2-3x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2}+x}$$

لا تنسا أنها من نفس الدرجة لـ $\sqrt{x^2}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-3x}{x+x} = \frac{-3}{2}$$

وأعمله نفس الشيء للسالب بس أنتبه أنه رح يصفر بالمقابلة

فبيطلع H.A بس $\boxed{\frac{-3}{2}}$

نظرية الحصر squazing thm

$\lim_{x \to a} F(x)$ ← تنفرض

← بتقدر تجيبها إذا كان الرينج محصور بينه عددين

$$h(x) < F(x) < g(x)$$

$\lim_{x \to a} h(x) = L$ ← $h(x)$ ← $F(x)$ ← $g(x)$ → $\lim_{x \to a} g(x) = L$

$$\text{then } \lim_{x \to a} F(x) = L$$

Ex:

1) $\lim_{x \to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0 * \sin\frac{1}{0} = 0 * \sin\infty$

هسا $\sin\infty$ أنا ما بعرف وين رايح هو متردد بين الـ 1 و الـ -1 مش عارف وين رايح لهيك بنستخدم نظرية الحصر

$$-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$$

← ما بهمنا الزاوية لأنو sin دائماً محصور بينه الـ 1 و الـ -1

بنضرب بـ x^2 لنوصل لـ $(-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1)$ x^2

$F(x)$

ناخذ $\lim$ (0) $\lim_{x \to 0}$ $(-x^2 \leq x^2 \sin\frac{1}{x} \leq x^2)$

[2] $\lim_{x\to 0} x^4 \cos\frac{2}{x} = 0 \cdot \cos\frac{2}{0} = 0 \cdot \cos\infty$

نفس الحكي

$$x^4 \left(-1 \le \cos\frac{2}{x} \le 1\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\underbrace{-x^4}_{0} \le x^4 \cos\frac{2}{x} \le \underbrace{x^4}_{0}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} x^4 \cos\frac{2}{x} = 0$$

أسئلة سنوات حل النهايات والاتصال:

[1] The Function $F(x) = \dfrac{(x-2)e^x}{x^2-4}$ has a vertical asy ?

Note : لا تنسا تختصر لأنه (A.A) لازم اذا عوضت يطلع معك $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ مو $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

[2] $\lim_{x\to 3} \dfrac{x-3}{Ax^2+Bx+c}$ does not exist, then A, B, C ?

هسا إذا عوضت ذيله النهاية رح يصفر البسط وبقلك النهاية غير موجودة يعني لازم يطلع معك عدد على صفر كيف ممكن تخليها هيك ؟

المقام عبارة تربيعية بقدر أخليها مربع كامله $(A \pm B)^2$

$(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-6x+9} \longrightarrow \lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}$$

دراسة إشارة

$$\frac{-\quad +}{3}$$

d.n.e

$A=1 \quad B=-6 \quad C=9$

3) $\lim_{x\to\infty}\frac{\log_2 x^3}{\log_3 x^4}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\ln x^3}{\ln 2}}{\frac{\ln x^4}{\ln 3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln 3}{\ln 2}\cdot\frac{\ln x^3}{\ln x^4}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3\ln 3}{4\ln 2}\cdot\frac{\ln x}{\ln x} = \frac{3\ln 3}{4\ln 2}$$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+16}}{|x|}+\frac{4}{x}$

إعادة تعريف $|x| = \begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x+16}}{-x}+\frac{4}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{4-\sqrt{x+16}}{x} = \frac{0}{0}$$

هون بنقرب مرافقة ...

5) $\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{Ax^2+Bx+C}$ does not exist, then Find A, B, C ?

6) $\lim_{x \to \infty} \frac{\log_3 n^2}{\log_2 n^3} =$

7) The V.A of $F(x) = \frac{x+1}{x^5 - x}$?

8) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 1}$

9) $\lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$

10) $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$

11) Find H. A of $F(x) = \frac{\sqrt{5x^2 - 2}}{x + 2}$

12) Find V.A $F(x) = \frac{2(x^2 + x)}{x^3 - x}$

13) the points of discont of $F(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-2)(x^2-1)}$

أوله شيء بالجيب الدومين $\mathbb{R} - \{2, \pm 1\}$ فبالخر $\{\pm 1, 2\}$ هاي بتكون فيم عدم الاتصال

[14] $\lim_{x \to \infty} \sqrt{25x^2 - 5x} - 5x$

[15] $F(x) = \begin{cases} \frac{2\sin x}{x}, & x < 0 \\ a, & x = 0 \\ b\cos x, & x > 0 \end{cases}$ Find a, b?

[16] $\lim_{x \to 0} \frac{(5+x)^2 - 25}{x}$

[17] The horzintal.asy of $F(x) = \frac{\sqrt{4x^2+2}}{x+3}$ is?

[18] $F(x) = \frac{x-3}{|x|-3}$ has a remosable discon at x= ?

[19] The values of x wich $F(x) = \frac{2x}{|x^2-5|-4}$ is discon?

[20] $\lim_{x \to \infty} \frac{2x - 3\sin x}{\cos x + 5x} =$

[21] $\lim_{x \to \infty} \frac{\cos x}{x} =$

1. $F(x) = c \longrightarrow F'(x) = 0$

2. $F(x) = ax \longrightarrow F'(x) = a$

3. $F(x) = x^n \longrightarrow F'(x) = n x^{n-1}$

4. $\frac{d}{dx}[aF(x) \pm bg(x)] = aF'(x) \pm bg'(x)$

5. $\frac{d}{dx}[F(x) \cdot g(x)] = F(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot F'(x)$

6. $\frac{d}{dx}\left[\frac{F(x)}{g(x)}\right] = \frac{F'(x)g(x) - F(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

7. $\frac{d}{dx}[(F(x))^n] = n F(x)^{n-1} \cdot F'(x)$

8. $\frac{d}{dx}[\sqrt{F(x)} = \frac{F'(x)}{2\sqrt{F(x)}}$

9. $\frac{d}{dx}[\sin(g(x))] = \cos(g(x)) \cdot g'(x)$

10. $\frac{d}{dx}[\cos g(x)] = -\sin g(x) \cdot g'(x)$

11. $\frac{d}{dx}[\tan g(x)] = \sec^2(g(x)) \cdot g'(x)$

12. $\frac{d}{dx}[\cot(g(x))] = -\csc^2((g(x)) \cdot g'(x)$

13) $\frac{d}{dx}[\sec g(x)] = \sec(g(x))\tan(g(x)) \cdot \acute{g}(x)$

14) $\frac{d}{dx}[\csc g(x)] = -\csc(g(x))\cot g(x) \cdot \acute{g}(x)$

15) $\frac{d}{dx}[\ln g(x)] = \frac{\acute{g}(x)}{g(x)}$

16) $\frac{d}{dx}[\log_a(g(x))] = \frac{\acute{g}(x)}{g(x)\ln a}$

17) $\frac{d}{dx}[a^{g(x)}] = a^{g(x)} \cdot \acute{g}(x) \cdot \ln a$

18) $\frac{d}{dx}[e^{g(x)}] = e^{g(x)} \cdot \acute{g}(x)$

19) $\frac{d}{dx}[\sin^{-1}(g(x))] = \frac{\acute{g}(x)}{\sqrt{1-(g(x))^2}}$

20) $\frac{d}{dx}[\cos^{-1}(g(x))] = \frac{-\acute{g}(x)}{\sqrt{1-(g(x))^2}}$

21) $\frac{d}{dx}[\tan^{-1}(g(x))] = \frac{\acute{g}(x)}{1+g^2(x)}$

22) $\frac{d}{dx}[\cot^{-1} g(x)] = \frac{-\acute{g}(x)}{1+g^2(x)}$

23) $\frac{d}{dx}[\sec^{-1}(g(x))] = \frac{\acute{g}(x)}{|g(x)|\sqrt{g^2(x)-1}}$

24) $\frac{d}{dx}[\csc^{-1}(g(x))] = \frac{-\acute{g}(x)}{|g(x)|\sqrt{g^2(x)-1}}$

الاشتقاق Differentiation

$$\acute{F}(a) = \lim \frac{F(x) - F(a)}{x - a}$$

الاشتقاق يرمز لها بالرموز $\acute{F}(x)$ ، $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d\,F(x)}{dx}$ و يُ
الميل slope و

* if $F(x)$ diffble at $x=a$, $F(x)$ cont at $x=a$

* " " not diffble at $x=a$, " discont at $x=a$.

* عندكم مثال القيمة المطلقة غير قابلة للاشتقاق عند صفر
مثلاً $F(x) = |x|$

$$F(x) = |x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

أو أشي متشيك أذا الله متصل بعدين بشوف الاشتقاق

$$F(a) = 0$$

$$\lim_{x \to a^+} F(x) = 0 \qquad \lim_{x \to a^-} F(x) = 0$$

اذا $F(x)$ متصل عند $x=0$ بقدرهسا بشوف أذا قابلة للاشتقاق

$$\acute{F}(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$$

طيب عرفنا أنه عند الصفر غير موجودة المشتقة $\leftarrow x = 0$, D.n.e
أوجدنا المشتقة من اليمين $\acute{F}(0)_+ = 1$ ومن اليسار $\acute{F}(0)_- = -1$
معناه $\acute{F}(0)_+ \neq \acute{F}(0)_-$.

في السؤال السابق لنفرض أنه المشتقة موجودة عند الصفر بنحسب المشتقة

هيك $f(x) = \begin{cases} 1 & , x \geq 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$

← بنحط إشارة مساواة عند القاعدة إلي كانت موجودة عندها قبل الاشتقاق

أمثلة على قواعد الاشتقاق

ثابت مشتقته صفر

1) $F(x) = 2^{40}$

$\acute{F}(x) = 0$

2) $F(x) = 2 - \frac{2}{3}x$ ← ثابت

خطية مشتقة معامل x

$\acute{F}(x) = -\frac{2}{3}$

4) $F(x) = \frac{3}{4}x^8$

كثير حدود

$\acute{F}(x) = \frac{3}{4} * 8 \; x^{8-1} = 6x^7$

5) $g(x) = (x-2)(2x+3)$

ترتيب

$g(x) = 2x^2 - 4x + 3x - 6$

$g(x) = 2x^2 - x - 6$

$\acute{g}(x) = 4x - 1$

6) $g(x) = x^2(x-1)$

ترتيب وتدخيله

$g(x) = x^3 - x^2$

$\acute{g}(x) = 3x^2 - 2x$

7) $F(x) = \frac{1}{2}x^6 - 3x^4 + x$

$F'(x) = \frac{1}{2} * 6x^5 - 3 * 4x^3 + 1$

$= F'(x) = 3x^5 - 12x^3 + 1$

8) $H(x) = \frac{-12}{x^5}$

إذا شفت قسمة قبل ما تشتق شوف إذا العدد بالبسط طلع الأقترانة إليه بالمقام للبسط وأقلب إشارة الأس

$H(x) = -12x^{-5}$

$H'(x) = -12(-5)x^{-5-1} = 60x^{-6}$

9) $F(x) = \sqrt{x} - x$

أي جذر تريديه إله قاعدة إشتقاق رقم 9 عوضيك إي جذر من القوى الـ ح لـ رقم تحوله لأس وتشتق على القاعدة 3

$F'(x) = \frac{(1)}{2\sqrt{x}} - 1$

$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$

10) $F(x) = \sqrt[3]{x^5} - \sqrt[3]{x^2}$ الجذر من القوى الثالثة

$F(x) = x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$

$F'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} - \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$

11) $F(x) = (3x+1)^2$

أشتق على القاعدة (8)

$$\acute{F}(x) = 2(3x+1)(3)$$
$$= 18x + 6$$

12) $F(x) = \frac{\sqrt{x} + x}{x^2}$

فك الكسر لكسرين

$$F(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2} + \frac{x}{x^2} = x^{\frac{-3}{2}} + x^{-1}$$

أشتق أو على القسمة

$$\acute{F}(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1\right) x^2 - 2x(\sqrt{x} + x)}{(x^2)^2}$$

$$\acute{F}(x) = \frac{x^2 + \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} - 2x^2}{x^4}$$

$$\acute{F}(x) = \frac{-x^2 - \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}}{x^4}$$

ملاحظة: في أسئلة بالكتاب
للي بدو يتدرب ألحل .

ملاحظة :- بتقدر تشتق مرة ومرتين وتلاتة وعدد لا نهائي من المرات
وبنرمز للمشتقة الثانية والثالثة والرابعة وأطلع بالرموز هيك :-

المشتقة الثانية $\ddot{F}(x)$ ، $\ddot{y}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$

المشتقة الثالثة $\dddot{F}(x)$ ، $\dddot{y}$ ، $\frac{d^3y}{d^3x}$

المشتقة الرابعة $F^{(4)}(x)$ ، $y^{(4)}$ ، $\frac{d^4y}{dx^4}$

وأطلع

{13} $F(x) = x^4 - 3x^3 + 16x$ ، $\ddot{F}(x) = ?$

$$\dot{F}(x) = 4x^3 - 9x^2 + 16$$
$$\ddot{F}(x) = 12x^2 - 18x$$

{14} $F(x) = 3x^2 - 2\cos x$ ، $\dot{F}(x) = ?$

نفس الاشتقاق العادي بس بدك تحوني حافظ مشتقات المثلثية

$$\dot{F}(x) = 6x + 2\sin x$$

{15} $F(x) = \sin x \cos x$

حولها لمطابقة أو مشتقة ضرب

$$F(x) = \frac{2}{2} \sin x \cos x$$
$$F(x) = 2 * \frac{1}{2} \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

نشتق بالقاعدة رقم 16 $\dot{F}(x) = \frac{1}{2}(\cos 2x)(2)$

$$= \cos 2x$$

الطريقة الثانية للسؤال السابق

$$F(x) = \sin x \cos x$$

مشتقة ضرب

$$F'(x) = \cos x \cos x + \sin x (-\sin x)$$

$$F'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$F'(x) = \cos 2x$$

{16} $$F(x) = 2\sec x - \csc x$$

$$F'(x) = 2\sec x \tan x + \csc x \cot x$$

{17} $$F(x) = \frac{x}{2 - \tan x}$$

مشتقة قسمة

$$F'(x) = \frac{1(2-\tan x) - x(0 - \sec^2 x)}{(2-\tan x)^2}$$

$$F'(x) = \frac{2 - \tan x + x\sec^2 x}{(2-\tan x)^2}$$

{18} $$F(x) = \sqrt[3]{1+\tan x}$$

$$F(x) = (1+\tan x)^{\frac{1}{3}}$$

$$F'(x) = \frac{1}{3}(1+\tan x)^{\frac{-2}{3}}(\sec^2 x)$$

$$F'(x) = \frac{\sec^2 x}{3(1+\tan x)^{\frac{2}{3}}}$$

{19} $F(x) = (x^2+1)^3 (x^2+2)^6$

$$F'(x) = 6(x^2+1)^2 (x^2+2)^6 (x) + 12(x^2+2)^5 (x^2+1)^3 (x)$$

{20} $y = \sin(x\cos x)$

نطبق قاعدة السلسلة

$$y' = \cos(x\cos x)\cdot(\cos x - x\sin x)$$

{21} $y = \cot^2(\sin x)$

$$y' = 2\cot(\sin x)(-\csc^2(\sin x))(\cos x)$$

$$y' = -2\cot(\sin x)\csc^2(\sin x)\cos x$$

{22} $y = \sin\sqrt{1+x^2}$

$$y' = \cos\sqrt{1+x^2}\left(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$y' = \frac{x\cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

* الاشتقاق ضمنياً implicit diFF

هو أنك تشتق أشياء بالنسبة لـ x وعلاقات بتشتق y بالنسبة لـ x مثلاً:-

{23} $x^3 + y^3 = 1$

$$3x^2\frac{dx}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

ملاحظة: باشتقاق الصفر دائماً أشتق $y \to \frac{dy}{dx}$ و $x \to 1 = \frac{dx}{dx}$

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$3y^2 \frac{dy}{dx} = -3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2}$$

(23) $x^2 + xy - y^2 = 4$

$$2x \frac{dx}{dx} + \frac{dx}{dx} y + x \frac{dy}{dx} - 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x \frac{dy}{dx} - 2y \frac{dy}{dx} = -(2x + y)$$

$$\frac{dy}{dx}(x - 2y) = -(2x + y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(2x+y)}{x - 2y}$$

(24) $\cos x \sin y = \frac{1}{4}$

$$-\sin x \frac{dx}{dx} \sin y + \cos x \cos y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$-\sin x \sin y + \cos x \cos x \, y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} \cos x \cos y = \sin x \sin y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan x \tan y$$

* أشتقاق الاسس واللوغاريتمات القواعد من (16)-(19)

ملاحظة: اذا كان الاساس e فالقاعدتين 17 و 18

$\ln e = 1$

{25} $y = x^5 + 5^x$

$y' = 5x^4 + 5^x (1)(\ln 5)$

$y' = 5x^4 + 5^x \ln 5$

{26} $y = \log_2 (1-3x)$

$y' = \frac{-3}{(1-3x)\ln 2}$

{27} $y = \log_5 (xe^x)$

$y' = \frac{e^x + xe^x}{(xe^x)\ln 5}$

* مستثنى أقترانه قوة أقترانه تكون كالتالي

{28} $y = x^x$

ناخذ ln الطرفين عشان يسهل الاس

$\ln y = \ln x^x$

$\ln y = x \ln x$

هسا بنشتق $\frac{y'}{y} = \ln x + x(\frac{1}{x})$

$y' = y(\ln x + 1)$

وبنخليها بدلالة x بتعويض محلها y فيصبح

$y' = x^x (\ln x + 1)$

{30} $y = \log_{(x-2)}^{(x+1)}$

الي زي هيك خطوة وحدة بتمرط السؤال بـ أنك تستخدم خاصية من خواص اللوغاريتمات والي هي $\frac{\log_c^a}{\log_c^b} = \log_b^a$

دائماً اختار ln

$$y = \frac{\ln(x+1)}{\ln(x-2)}$$

أشتقاق قسمة وبس

$$\acute{y} = \frac{\frac{\ln(x-2)}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x-2}}{(\ln(x-2))^2}$$

* أشتقاقات الـ نقرس المثلثية هاد ③ أقترانات مهمة sin و sec و tan أما الباقيات نفس أشتقاقهم بس بنضرب بسالب.

{21} $y = \tan(x^2)$

$$\acute{y} = \frac{2x}{1+x^4}$$

{32} $y = (\tan x)^2$

$$\acute{y} = \frac{2\tan x}{1+x^2}$$

{33} $y = \sqrt{x^2-1}\ \sec^{-1}x$

$$\acute{y} = \frac{2x\ \sec^{-1}x}{2\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x^2-1} * \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$\acute{y} = \frac{x\ \sec^{-1}x}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{|x|}$$

{34} $y = \sin^{-1}(2x+1)$

$$\acute{y} = \frac{2}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}$$

{35} $y = \cos^{-1}(e^{2x})$

ملاحظة: $(e^2)^2 = e^4$

$$\acute{y} = \frac{-2e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}}$$

* تطبيقات التفاضل Diff Application

* tanget Lines and the normal to the tanget line :-
المماسات والعمودي على المماس

* Find the equation of the tangent line and the normal to the tangent line :-

1 $y = x^4 + 2x^2 - x$, $(1, 2)$

طريقة الحل 1- بعطيك نقطة (x_1, y_1) أو $x_1 = a$ اذا أعطاك هاي عوضها بالمعادلة وطلع y.

2 أشتق المعادلة وعوض قيمة x_1 بالمشتقة عشان تعطيك الميل. M رمز الميل $F(a)$ أو $f(a)$ أو $y|_{x_1=a}$

3 بعدين بتجيب معادلة الخط المستقيم $y - y = M(x - x_1)$ وبتعوض فيها القيم اللي عندك هيك بتكون طالعة معادلة المماس أما اذا بدنا معادلة العامودي معكوس ميل المماس مع تغيير الإشارة.

$y' = 4x^3 + 4x - 1$ نعوض x_1

$y' = 7 = M = 7$

معادلة المماس $y - y_1 = M(x - x_1) \longrightarrow y - 2 = 7(x - 1)$

y موضع القانون $y = 7(x-1) + 2$

معادلة العامودي $y - y_1 = \frac{-1}{M}(x - x_1)$

$y - 2 = \frac{-1}{7}(x - 1)$

2 $y = \sec x$, $(\pi/3 , 2)$

$y' = \tan x \sec x$ $\quad y'|_{x_1=\frac{\pi}{3}} = \tan\frac{\pi}{3}\sec\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3} = M$

معادلة المماس $y - 2 = 2\sqrt{3}(x - \frac{\pi}{3})$ معادلة العامودي $y - 2 = \frac{-1}{2\sqrt{3}}(x - \frac{\pi}{3})$

ج) $y = x + \sqrt{x}$, $(1,3)$

$$y = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\acute{y} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{1}} \quad \frac{1}{2}$$

$$\acute{y} = \frac{3}{2} = M \qquad -\frac{1}{M} = -\frac{2}{3}$$

العامودي: $y - y_1 = -\frac{1}{M}(x - x_1)$ $\qquad y - 3 = -\frac{2}{3}(x-1)$

معادلة المماس: $y - y_1 = M(x - x_1)$ $\qquad y - 3 = \frac{3}{2}(x-1)$

ومحتمل يطلب معادلة المماس لحالها فبنطلعها دون معادلة العامودي .

* إذا ميل المماس أفقي أنه الميل = 0 أي المشتقة صفر

أمثلة :-

$F(x) = \ln(x - 4x^2)$, then $F(x)$ has horizontal tangent at $x = ?$

لأنو أفقي ← $\acute{F}(x) = 0$ $\qquad \acute{F}(x) = \frac{1 - 8x}{x - 4x^2}$

المقسوم فقط = 0 $\qquad \frac{1 - 8x}{x - 4x^2} = 0$

$1 - 8x = 0$ $\qquad x = \frac{1}{8}$

لو طلب نقطة بتحوم على $F(x)$ ← $\left(\frac{1}{8}, -\ln 16\right)$

* القيمة القصوى (الصغرى والعظمى)

* The extrane values (minimum and maximum)

Note :- 1 absolute max ← قيمة عظمى وماقي أكبر منها

Local max ← قيمة عظمى وفي أكبر منها

2 abs min ← قيمة صغرى وماقي أكبر منها

Local min ← قيمة صغرى وفي أكبر منها

طريقة إيجاد القيم الصغرى والعظمى :-

1* نشتق ونجد النقط أو القيم الحرجة (Critial points) وإلي هي عبارة عن $F(x)=0$, $F(x)=d.n.e$ ← صفر الدومين طبعًا (يعني أفضل شي تشوف الدومين)

2* بنرسم خط أعداد وبندرس أشارة المشتقة موجبة لفترة معينة معناه الاقتران متزايد بنهاية الفترة والعكس صحيح (متناقص اذا سالب)

3* النقطة اللي بتتغير عندها تغير بإشارة الاقتران بتكون ياعظمى يا صغرى.

Note :- إذا الكلام يا أما مغلقة أو ولد شيء .

← increas متزايد الاقتران في الفترة المشتقة فيها أشارتها موجبة

← decreas متناقص الاقتران في الفترة المشتقة فيها أشارتها سالبة .

← هسا تحديد مطلقة أو محلية بتكون من خلال أذا كانت عظمى إذا في أكبر منها بتكون هي محلية والثانية مطلقة وإذا كانت صغرى إذا في أصغر منها بتكون محلية والثانية عظمى والعكس صحيح .

Ex :-

عدد مو نقطة

II Find the critical numbers of the Function?

A- $F(x) = 4 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x^2$

$\acute{F}(x) = \frac{1}{3} - x$

$\frac{1}{3} - x = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

B- $F(x) = 2\cos x + \sin^2 x \quad , \quad x \in [0, 2\pi]$

$\acute{F}(x) = 0$

$\acute{F}(x) = -2\sin x + \underbrace{\sin 2x}_{2\sin x \cos x} = 0$

نفس الحكي إلي حكينا فوق عن المشتقة d.n.e

$$\frac{-2\sin x + 2\cos x \sin x}{2\sin x} = \frac{0}{2\sin x}$$

$-1 + 2\cos x = 0$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{3} \quad g \quad \frac{5\pi}{3}$

C- $F(x) = \sqrt{1 - x^2}$

$[-1, 1] = Dom$ نجد الدومين الجذر

$\acute{F}(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \longrightarrow \acute{F}(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$F(x)$ dne $\longrightarrow [-1,1]$

$F'(x) = 0$

$F'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

$-x = 0 \quad \boxed{x=0}$

Critical Numbers $\longrightarrow \{-1, 0, 1\}$

2) Find the max and min values F or the following?

1- $F(x) = (x^2-1)^3 \; , [-1,2]$

$D = \mathbb{R}$

$F'(x) = 6x(x^2-1)^2$

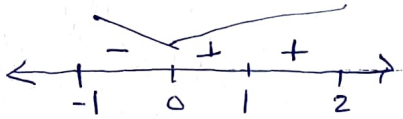
$F'(x) = 0$

$F'(x) = 6x(x^2-1)^2 = 0$

$6x = 0 \quad | \quad (x^2-1)^2 = 0$

$x = 0 \quad | \quad x = \pm 1$

كلهم ضمن المجال



inc فترات التزايد $(0,2)$

dec فترات التناقص $(-1,0)$

هنا في عندكم $x=0$ abs min فيك أخذ منها

وفي عندكم الـ 2 طرفين بالتالي مطلقة أول فيك توجد قيم $F(x)$ للطرفين

وبحل المثال هاذ أعلى واحد فيهم هو مطلق كبير $F(2) = 27 \quad F(-1) = 0$

abs max $x = 2$

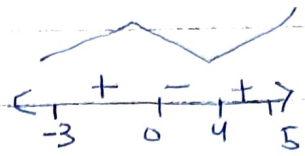
2- $F(x) = x^3 - 6x^2 + 5$, $[-3, 5]$

$D = R$

$F'(x) = 3x^2 - 12x = 0$

$3x(x-4) = 0$

$x = 0, 4$



inc $\rightarrow (-3,0) \cup (4,5)$ dec $\rightarrow (0,4)$

أطراف مغلقة أو لـ شيء

هسا عندكم $x = 5, 0$ حاطين بدنا نحدد أي وحدة فيهم مطلقة حاطين

$F(0) = 5$

$F(5) = -20$

معناها $x = 0$ absmax

$x = 5$ بنطنش

هسا برضو عندكم $x = -3, 4$ صغرى بدنا نحدد المطلقة الصغرى

$F(-3) = -76$

$F(4) = -27$

absmin $x = -3$

ما بيقدر بنطنش $x = 4$ localmin لأنها مش طرف

" Concavity and in Flection p.t " فترات التقعر ونقط الانعطاف

نفس مبدأ القيم القصوى بس بزق واحد هونك كل شغلك ع المشتقة الثانية مش الأولى يعني بتشتق مرتين وبتوجد من $F(x)$ dnea $F''(x)$ أو $F''(x) = 0$ وبتدرس أشارة المشتقة الثانية عشان تحدد أذا مقعر للأعلى أو مقعر للأسفل ∩

نقطة الانعطاف :- لها شرطين [1] يتكون عبارة $\ddot{F}(x)=0$ أو $\ddot{F}(x)$ dne
[2] يتغير إشارة الاقتران عندها

أمثلة :-

[1] $\ddot{F}(x) = x e^{-x}$

الدومين $\mathbb{R}$

$\dot{F}(x) = -x e^{-x} + e^{-x}$ ← $\dot{F}(x) = e^{-x}(1-x)$

$\ddot{F}(x) = -(1-x)e^{-x} - e^{-x}$

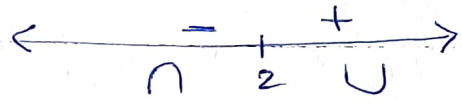
$\ddot{F}(x) = 0$ لنوجد قيم dne'

$-(1-x)e^{-x} - e^{-x} = 0$

$e^{-x}\left((x-1)-1\right) = 0$

$e^{-x} \neq 0$ $\quad (x-1)-1 = 0$

$\boxed{x = 2}$



فترات التقعر للأسفل $(-\infty, 2)$ | نقطة الانعطاف $(2, F(2))$
لأعلى $(2, \infty)$

[2] if $F(x) = ax^3 + 3x^2$, has on inFFection oF $x=1$, $a=?$

الاقتران $F(x)$ له نقطة انعطاف عند $x=1$ والاقتران ك.ح ملغي $\ddot{F}(x)$ dne
أيضًا $\ddot{F}(x)=0$ when $x=1$

$\dot{F}(x) = 3ax^2 + 6x$

$\ddot{F}(x) = 6ax + 6$ ← $\ddot{F}(1) = 6a(1) + 6 = 0$

$6a + 6 = 0$ $\quad \boxed{a = -1}$

سنوات

[1] Let F and g be differentiable at $x=1$, such that $F(1)=2$, $F'(1)=1$, $g(1)=-2$, $g'(1)=4$ then

Find $\frac{d}{dx}\left(g(x)\sqrt{F(x)}\right)\Big|_{x=1} = ?$

[2] if $2x^2+y^2=2$, then $\frac{d^2y}{d^2x} = ?$

[3] Let $F(x)=e^{x^2}$, $F'(1) = ??$

[4] // $F(x)=\sin^2 x$, $F'\left(\frac{\pi}{4}\right) = ?$

[5] // $F(x)=x\tan x$, $F'(-1) = ?$

[6] // $F(x)=(x+1)^x$, $F'(1) = ?$

[7] $F(x)=\sin^3(3x)$ Find $F'\left(\frac{\pi}{12}\right)$?

[8] the equation of the tangent line to the curve $F(x)=\sin^2 x - x\cos^2 x + 3$ at $x=0$ is?

[9] The value of (c) such that the line $y=-x-4$ is the tangent to the curve $y=c\sqrt{x}$?

[10] The equation of the tangent Line to the curve $F(x)=\sin^2 x - x\cos x^2 + 3$ at $x=0$ is ?

« قاعدة لوبيتال » L'H Rule

* لو كان عندك نهاية تؤول لعدد أو لانهائي $\lim_{x \to a} \frac{F(x)}{g(x)}$ النهاية ← (كانت عبارة عن حاصل قسمة إقترابين)

بتروح بتعوض ذيك النهاية بالأقتراب إذا طلع معك واحد من هدول

1	2	3	4	5	6	7
$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\infty * 0$	$\infty - \infty$	∞^0	1^∞	0^0

بدك تحولها لكسر وبعدين بتشتق البسط والمقام لحالة وبتعوض ذيك النهاية وبطلع معك الجواب .

* أول حالتين جاهزات بكونو كسور ، الثالثة بدك تقلب كيف ؟ زي هيك :-

$\infty * 0 \leftarrow \frac{\infty}{\frac{1}{0}}$ أو $\frac{0}{\frac{1}{\infty}} \xleftarrow{\text{بالمقلوب}} \frac{\infty}{\infty}$ أو $\frac{0}{0}$

الحالة الرابعة توحيد مقامات أو خصائص اللوغاريتمات (خاصية طرح لوغاريتمين لنفس الأساس تقلب قسمة وبتدخله النهاية جوا اللوغاريتم لإنها متصلة على دومين)

* أخر ٣ حالات تقريباً نفس المبدأ ، بتستخدم خاصية القوة باللوغاريتمات

$1^\infty \Rightarrow \ln 1^\infty \Rightarrow \infty(\ln 1) \Rightarrow \infty, 0$

$0^0 \Rightarrow \ln 0^0 \Rightarrow 0(\ln 0) \Rightarrow -\infty, 0$

$\infty^0 \Rightarrow \ln \infty^0 \Rightarrow 0(\ln \infty) \Rightarrow 0, \infty$

بنحلو على الحالة الثالثة

* وفي قاعدة بسيطة ← $\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{a}{x})^{bx} = e^{a*b}$ *

بدكم تنتبهو لإشارة a و b « سالب أو موجب »

- هاي القاعدة حتى بتستخدمها ، بس تطلع معك آخر ٣ حالات وتكون صيغة النهاية زي ما مكتوب عند *

أمثلة :-

1] $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-x} = \frac{0}{0}$

إشتق البسط والمقام كل

$\lim_{x\to 1} \frac{2x}{2x-1} = \frac{2(1)}{2(1)-1} = \frac{2}{1} = 2$

2] $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\tan 5x} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 0} \frac{4\cos 4x}{5\sec^2 5x} = \frac{4(1)}{5(1)} = \frac{4}{5}$

3] $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln}{\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to \infty} \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{2}{\sqrt{\infty}} = 0$

4] $\lim_{x\to \infty} \sqrt{x}\, e^{-x/2} = \sqrt{\infty} * e^{-\infty/2} = \infty * e^{-\infty} = \infty \cdot 0$

$\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x}}{e^{x/2}} \to \lim_{x\to \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2}e^{x/2}} = \frac{0}{\frac{1}{2}(e^{\infty/2})}$

$= \frac{0}{\infty}$

$= \frac{0}{\frac{1}{0}}$

$= \frac{0}{1} \times \frac{0}{1}$

$= 0$

5] $\lim_{x\to 0^+} \sin x \ln x =$ $\quad 0 \cdot -\infty$ عادي سالب و ∞ لهوبيتال

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\csc x} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc x \cot x}$$ رتبها

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin x \tan x}{x} = \frac{0}{0}$$ كمان مرة لهوبيتال

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin x \tan x}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{-\cos x \tan x - \sin x \sec^2 x}{1}$$

« رتبتها » $\lim_{x\to 0^+} -\sin x - \tan x \sec x = -(0) - (0)(1) = 0$

6] $\lim_{x\to 0} \csc x - \cot x = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty$

هون توحيد مقامات ما بقدر أستخدم خصائص ln و log

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-(-\sin x)}{\cos x} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \tan x = 0$$

7] $\lim_{x\to\infty} x - \ln x = \infty - \infty$

$1 = \ln e$ هون بقدر أستخدم خصائص الـ ln و log

$$\lim_{x\to\infty} x(\ln e) - \ln x \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \ln e^x - \ln x$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln \frac{e^x}{x} \Rightarrow \ln \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \ln \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$ لهوبيتال

$$\ln \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} \Rightarrow \ln \lim_{x\to\infty} e^{\infty} = \ln \infty = \infty$$

8] $\lim_{x \to 0^+} x^{\sqrt{x}} = 0^0$

$y = x^{\sqrt{x}}$

$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}}$ بدنا نفرضه ويعدها بنوخذ ln للطرفين

$\ln y = \sqrt{x} \ln x$ بنوخذ $\lim_{x \to 0^+}$ للطرفين

$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln x \Rightarrow 0 * -\infty$

$\ln y$ بنعتبرها ثابت وبدنو النهاية لـ x

$$\ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}} \to x^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}}$$

$$\ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{-2 x^{\frac{3}{2}}}{x} \; x^{\frac{1}{2}}$$

$$\ln y = \lim_{x \to 0^+} -2\sqrt{x} = -2\sqrt{0} = 0$$

$\ln y = 0$

$y = e^0 = 1$ e للطرفين

$y = 1$

9] $\lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{2}{x}\right)^{x} = 1^{\infty}$

هاي على القاعدة البسيطة بتنحل :-

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{(a)(b)}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{2}{x}\right)^{x} = e^{(-2)(1)} = e^{-2}$$

10] $\lim_{x\to 0} (1-2x)^{1/x} = 1^{\infty}$

هنا هاي بتنحل على القاعدة البسيطة بس بدك ترتب شكلها

كيف بترتب شكلها ؟! ← بتعوض الأسد

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$$

$$x \Rightarrow 0 \Rightarrow y \Rightarrow \infty$$

$$\lim_{y\to\infty} \left(1-\frac{2}{y}\right)^{y} = e^{-2}$$

« نفس إلي قبلها بس مقلوب بشكلها أ »

11] $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$ ؟؟

هاد ج أخطر أقسمة لقسمين لإنو مش واضح شكلها ما بقدر

أعرف لأي حالة من الحالات بتنتمي .

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x} * \left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{1}$$

بفرع النهاية وبحل كل نهاية لحالة بالآخر نتيجة النهايتين

بتضربهم ببعض .

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{1} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2} = 1$$

خطوة من أولة جزء

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x-5}\right)^{2x} \rightarrow$$

هسا هاي بدي أحلها على القاعدة ، بدي أسحب x

عامل مشترك عشان تصير $\frac{عدد}{x}$ حسب القاعدة كمان ح

أعتبر أخذها لو الأس كان $\frac{عدد}{x}$ زي مثاله 10

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x\,(1-\frac{3}{2x})}{2x\,(1+\frac{5}{2x})}\right)^{2x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(1-\frac{3}{2x})^{2x}}{(1+\frac{5}{2x})^{2x}}$$

بنوزع النهاية على البسط والمقام والجواب حسب القاعدة

$$= \frac{e^{\frac{-3}{2}(2)}}{e^{\frac{5}{2}(2)}}$$

$$= \frac{e^{-3}}{e^{5}} = e^{-8}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x+1} = e^{-8} * (1)$$

$$= e^{-8}$$

ملاحظة 1 :- بهاي الحالة إنتبهو تسحبوا x مع معاملها عامل مشترك إذا ما كان 1

ملاحظة 2 :- ملخص الدرس الحالات الأساسية لـ لويسالة أولة حالتين الباقيات هما متغير شكلهم بدهم فقط قريب.

سؤال ٥:-

1] $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^2}$

2] $\lim_{x\to \infty} \frac{2x + \sin 6x}{2x}$

3] $\lim_{x\to \infty} 8^x - 4^x = \infty - \infty$

« حالة أخرى »

نسوي المقام والصيغة بنوخذ الأساس الأكبر عامله مشترك في حالة يؤول x لل $\infty+$ اذا سالب ∞ الـ x تؤول معناها بنوخذ الأساس الأصغر عامله مشترك.

$$\lim_{x\to \infty} 6^x\left(1 - \frac{4^x}{6^x}\right) \Rightarrow \lim_{x\to \infty} 6^x\left(1 - \left(\frac{4}{6}\right)^x\right)$$

« إذا الأساس أقل من واحد معناها لما x تؤول لل ∞ يساوي صفر »

$$\lim_{x\to \infty} 6^x\left(1 - \left(\frac{4}{6}\right)^x\right) = 6^{\infty}\left(1 - \left(\frac{4}{6}\right)^{\infty}\right) = \infty(1-0) = \infty$$

4] $\lim_{x\to \infty} \tan^{-1}\left(\sqrt[x]{x}\right)$ هاي سؤال على حالة ∞^0 إنتبهوا

إنكم بتدخلوا النهاية معناها الجواب النهائي النهاية ،

ما تنسوا تاخذو ثانية الإنقرس إلو .

5] $\lim_{x\to 0} \frac{7^x - 2^x}{6^x - 5^x}$

سؤال ٤-

[1] Find $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$ For $y = 3^x + \ln(\cosh x)$

[2] $\sinh x - \frac{e^x}{2} = -3$, Find $x = ?$

الحل :-

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} - \frac{e^x}{2} = -3$$

$$-\frac{e^{-x}}{2} = -3 \longrightarrow e^{-x} = 6$$

$$\ln e^{-x} = \ln 6$$

$$-x(\ln e) = \ln 6$$

$$x = -\ln 6$$

[3] if $\sinh x = -3$, Find $\coth x = ?$

[4] $y = (\coth(e^x))^{\cosh x}$, Find $\frac{dy}{dx} = ?$

ملاحظة خذ ln الطرفين وأشتق الطرفين
وترتيبو بعدها وخلوها بدلالة (y') أو $\frac{dy}{dx}$

* Find the value ?

1] $\sin h\, 0 = \frac{e^0 - e^{-(0)}}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$

2] $\cos h\, 0 = \frac{e^0 + e^{-(0)}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$

3] $\tan h\, 0 = \frac{e^0 - e^{-(0)}}{e^0 + e^{-(0)}} = \frac{0}{1} = 0$

4] $\operatorname{sech} 0 = \frac{1}{\cos h\, 0} = 1$

5] $\sin h(\ln 2) = e^{\ln 2} - e^{-\ln 2} = \frac{e^{\ln 2} - e^{\ln \frac{1}{2}}}{2}$

$= \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$

6] $\tan h(1) = \frac{e^1 - e^{-1}}{e^1 + e^{-1}} = \frac{e - \frac{1}{e}}{e + \frac{1}{e}}$

7] $\cos h(\ln 3) = \frac{e^{\ln 3} + e^{-\ln 3}}{2} = \frac{e^{\ln 3} + e^{\ln \frac{1}{3}}}{2}$

$= \frac{3 + \frac{1}{3}}{2}$

$= \frac{5}{3}$

* prove the following :-

1] $\tanh(\ln x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

$$\tanh(\ln x) = \frac{e^{\ln x} - e^{-\ln x}}{e^{\ln x} + e^{-\ln x}} = \frac{e^{\ln x} - e^{\ln \frac{1}{x}}}{e^{\ln x} + e^{\ln \frac{1}{x}}}$$

$$= \frac{(x - \frac{1}{x}) * (x)}{x + \frac{1}{x} * (x)}$$

$$= \frac{x^2-1}{x^2+1} \quad \#\#$$

* ما يجري إثباتات بس للتوضيح :-

* 1] $\tanh x = \frac{12}{13}$ Find the other h.B. Function ?

بنوعية هاي الأسئلة بنستخدم العلاقات .

$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$

$1 - (\frac{12}{13})^2 = \operatorname{sech}^2 x$

* إخترت الإجابة الموجبة لـ sech إلو المدى $(0,1]$ بعتبرها إلو قيم بالمدى

$\checkmark \operatorname{sech} x = \frac{5}{13} \Rightarrow \checkmark \cosh x = \frac{13}{5}$

$\sinh x = \tanh x \cosh x = \frac{13}{12} * \frac{13}{5}$

$\checkmark \sinh x = \frac{12}{5} \Rightarrow \checkmark \operatorname{csch} x = \frac{5}{12}$

$\checkmark \coth x = \frac{13}{12}$

2] if $\cosh x = \frac{5}{3}$, $x > 0$, Find the values ?

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 1 = \sinh^2 x$

$\sqrt{\sinh^2 x} = \sqrt{\frac{16}{9}} \Rightarrow \sinh x = \pm\frac{4}{3}$

ح ناخد الإجابة الموجبة فقط لإنو طالب $x > 0$

✓ $\sinh x = +\frac{4}{3} \Rightarrow$ ✓ $\operatorname{csch} x = \frac{3}{4}$

✓ $\tanh x = \frac{4}{5} \Rightarrow$ ✓ $\coth x = \frac{5}{4}$

✓ $\operatorname{sech} = \frac{3}{5}$

* Devoluate $\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$

ما بنستخدم لوبيتال لإنو زي كإنه دوري ما إلها نهاية ح نضطر نفك الـ sinh

$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{e^x} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2e^x}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} - \frac{e^{-2x}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{e^{-2(\infty)}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{0}{2}$

$= \frac{1}{2}$

2] $\lim_{x\to 0} \frac{\tanh x}{\tan x} = \frac{0}{0}$

هاي لوبيتال لية ماخي إشي مشترك بين البسط والمقام نأي الإقتران الأسي

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sech}^2 x}{\sec^2 x} = \frac{\operatorname{sech}^2 0}{\sec^2 0} = \frac{1}{1} = 1$$

3] $\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x - x}{x^3} = \frac{0}{0}$ * لوبيتال

$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{3x^2} = \frac{0}{0}$ * كمان مرة لوبيتال

$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{6x} = \frac{0}{0}$ * كمان مرة لوبيتال

$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x}{6} = \frac{1}{6}$

* Find the derevative ?

1- $f(x) = \tanh(1+e^{2x})$

$f'(x) = \operatorname{sech}^2(1+e^{2x})(2e^{2x})$

$F'(x) = 2e^{2x} \operatorname{sech}^2(1+e^{2x})$

2- $f(x) = x \sinh x - \coth x$

$f'(x) = \sinh x + x \cosh x - \sinh x$

$f'(x) = x \cosh x$.

(3) $y = e^{\cosh 3x}$

$\acute{y} = 3\sinh 3x\, e^{\cosh 3x}$

(4) $F(x) = \operatorname{sech}^2(e^x)$

$\acute{F}(x) = 2\operatorname{sech}(e^x)\left(-(\operatorname{sech}(e^x)\tanh(e^x))\right)e^x$

$\acute{F}(x) = -2x$

(5) $F(x) = \ln(\cosh x)$

$\acute{F}(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x$

(6) $y = x\coth(1+x^2)$

$y' = \coth(1+x^2) + x(-\operatorname{csch}^2(1+x^2))(2x)$

$y' = \coth(1+x^2) - 2x^2\operatorname{csch}^2(1+x^2)$

(7) $y = \sinh(\cosh x)$

$y' = \cosh(\cosh x)(\sinh x)$

(8) $y = \cosh(\ln x)$

$y' = \sinh(\ln x)\left(\frac{1}{x}\right)$

$y' = \frac{\sinh(\ln x)}{x}$

التكامل integration

بطل بساطة التكامل عكس التفاضل بالمبدأ
التفاضل (الاشتقاق) بصفر الاقتران أما التكامل بطبر الاقتران
مثلاً التفاضل من $ق \leftarrow ف \leftarrow ق' \leftarrow ق$ وهكذا
التكامل $ق'' \leftarrow ق \leftarrow ف \leftarrow ق$ وهكذا
(العملية عكسية)

هسا بنجيب لقواعد التكامل :-

1) $\int a\,dx = ax + c$

2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

3) $\int (ax+b)^n \cdot dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$

4) $\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$

5) $\int \sin(ax+b)\,dx = \frac{-1}{a}\cos(ax+b) + c$

6) $\int \sec^2(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + c$

7) $\int \csc^2(ax+b)\,dx = \frac{-1}{a}\cot(ax+b) + c$

8) $\int \sec(ax+b)\tan(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sec(ax+b) + c$

9) $\int \csc(ax+b)\cot(ax+b)\,dx = \frac{-1}{a}\csc(ax+b) + c$

10) $\int e^{ax+b} \cdot dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$

11) $\int b^{ax+d} \cdot dx = \frac{b^{ax+d}}{a \cdot \ln b} + c$

12) $\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln|x| + c$

13) $\int \frac{F'(x)}{F(x)} \cdot dx = \ln|F(x)| + c$

14) $\int \frac{g'(x)}{1+g^2(x)} \cdot dx = \tan^{-1}(g(x)) + c$

15) $\int \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}} \cdot dx = \sin^{-1}(g(x)) + c$

16) $\int \frac{g'(x)}{|g(x)|\sqrt{g^2(x)-1}} \cdot dx = \sec^{-1}(g(x)) + c$

17) $\int \sinh(ax+b) \cdot dx = \frac{1}{a}\cosh(ax+b) + c$

18) $\int \cosh(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}\sinh(ax+b) + c$

19) $\int \operatorname{sech}^2(ax+b) \cdot dx = \frac{1}{a}\tanh(ax+b) + c$

20) $\int \operatorname{csch}^2(ax+b) \cdot dx = -\frac{1}{a}\coth(ax+b) + c$

21) $\int \operatorname{sech}(ax+b)\tanh(ax+b)\, dx = -\frac{1}{a}\operatorname{sech}(ax+b) + c$

22) $\int \operatorname{csch}(ax+b)\coth(ax+b)\,dx = \frac{-1}{a}\operatorname{csch}(ax+b)+c$

* التكامل نوعين: 1- محدود: حوابه رقم (توجد قيمة عليا وسفلى)
2- غير محدود: حوابه أقترانه

* خصائص التكامل:-
1 التكامل بتوزع على الطرح والجمع وما بتوزع على الضرب والقسمة
مثاله: $\int F(x)+g(x)\,dx = \int F(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

2 الثابت بيطلع برة التكامل $\int aF(x)\,dx = a\int F(x)\,dx$

3 خاصية الإضافة وهو أنك تقسم التكامل الواحد لتكاملين من خلاله فرض حد تكامل جديد.

$$\int_a^c F(x)\,dx = \int_a^b F(x)\,dx + \int_b^c F(x)\,dx$$

4 هسا التكامل إلي إله نفس حدود بساوي صفر.

$$\int_a^a F(x)\,dx = 0$$

5 إذا عكست حدود التكامل لازم تضربوا التكامل بسالب

$$\int_a^b F(x)\,dx = -\int_b^a F(x)\,dx$$

6 ملاحظة $\int_a^b F(x) = F(a) - F(b)$

7 هسا التكامل إلي حدود هيك $\int_{-a}^{a}$ أو $\int_{-a}^{a}$ بنقسم لقسمين إذا أحدهما داخله أقترانه لها بدون الجواب لتكامل صفر وإذا even بكون جواب التكامل $\int_{-a}^{a} F(x)\,dx = 2\int_0^a F(x)\,dx$ وبهاي الحالة بالحادة بكون التكامل ضعف تكامله.

* أمثلة على قواعد التكامل :-

[1] $\int_2^5 (4-2x)\,dx = 4x - \frac{2x^2}{2}\Big]_2^5 = 4x - x^2\Big]_2^5$

$= 20 - 25 - (8-4) = \boxed{-9}$

[2] $\int 2x - x^3\,dx = x^2 - \frac{x^4}{4} + C$

[3] $\int_{-1}^{2} |x|\,dx$

إذا بدنا نكامل مطلق لازم يكون فيه حدود تكامل إذا ما في بنشيل إشارة المطلق بس بالتالة عنا حدود إذ أطريقة حله أنه نستخدم خاصية الإضافة الحد الي رح نضيفه هو صفر المطلق ونبدس إشارة

$|x| = 0 \longrightarrow x = 0$ (− | + ، 0)

$\int_{-1}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{2} x\,dx$

$= -\int_{-1}^{0} x\,dx + \int_{0}^{2} x\,dx$

$= -(0-(-1)) + (2-0) = -1 + 2 = \boxed{1}$

[4] $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx$

$= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$

[5] $\int \tan x\,dx = \int \tan x * \frac{\sec x}{\sec x}\,dx$

$= \int \frac{\tan x \sec x}{\sec x}\,dx$ المقام مشتق بالبسط معلها

$= \ln|\sec x| + C = \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + C$ المقام ln

$= \ln|\cos x| = -\ln|\cos x| + C$

* ملاحظة: الجذور في التكامل أقلبها دائماً أسس

6) $\int \sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}\, dx = \int x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{2}{3}}\, dx$

$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+(\frac{2}{3})} + \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+(\frac{3}{3})} = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + 3\frac{x^{\frac{5}{3}}}{5} + c$

7) $\int x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x - 2\, dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{8} - 2x + c$

8) $\int (x+4)(2x+1)\, dx$

أنا لحد الآن ما بعرف تكامل حاصل ضرب أقترانين شو بعمل إذا كان لقوة زي مربع كامل بفكه أو حاصل ضرب قوسين بدخلهم ببعض

$\int (2x^2 + 9x + 4)\, dx = \frac{2}{3}x^2 + \frac{9}{2}x^2 + 4x + c$

9) $\int x(x^2+2)^2\, dx$

$\int x(x^4 + 4x^2 + 4)\, dx$

$\int x^5 + 4x^3 + 4x\, dx = \frac{x^6}{6} + x^4 + 2x^2 + c$

10) $\int \frac{x^3 - 2\sqrt{x}}{x}\, dx$

زي محكينا بمثال 8 حاصل قسمة ما بعرف تكامله بوزع المقام وبرتب

$\int \frac{x^3}{x} - \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{x}\, dx = \int x^2 - 2x^{-\frac{1}{2}}\, dx$

$= \frac{x^3}{3} - 2\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{x^3}{3} - 4x^{\frac{1}{2}} + c$

* تكاملات المثلثية البسيطة ممكن نستخدم متطابقات وهيك مثلاً -

11) $\int 1+\tan^2 x \, dx = \int 1+\sec^2 x - 1 \, dx$

$= \int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$

12) $\int \frac{\sin 2x}{\sin x} \, dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{\sin x} \, dx$

$= \int 2\cos x \, dx = 2\sin x + c$

* وممكن هيك بس بده ترتيب فقط

13) $\int \sec x (\sec x + \tan x) \, dx$

بدخل $\sec x$ ع القوس وبتكامل

$\int \sec^2 x + \sec x \tan x \, dx$

$= \tan x + \sec x + c$

* وممكن مباشر

14) $\int 4 - \csc x \cot x \, dx$

الجواب $\longrightarrow 4x^2 + \csc x + c$

* التكامل بالتعويض : هو أحد طرق التكامل ويستخدمه لتكامل حاصل ضرب أقترانين أحدهما مشتقة للآخر

$\int F(x) g(x) \, dx$

$F'(x) = g(x)$

أمثلة :-

1) $\int x \sin x^2 \, dx$

حاصل ضرب اقترانين لكن بدنا نطلع ملهم ما في إي علاقة بينهم من ناحية متطابقات بس لو طلعنا كل زاوية sin ← x^2 مشتقتها $2x$ وفيه بره ناقصة 2 مش مقصة بضرب ÷ $\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} \int 2x \sin x^2 \, dx$$

بفرض $y = x^2$

بشتق $dy = 2x\,dx$

$$\frac{1}{2} \int \sin y \, (2x\,dx) \quad \left(\frac{dy}{}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin y \, dy = -\frac{1}{2} \cos y + C$$

بترجع الـ y لـ x $(y = x^2)$

$$= -\frac{1}{2} \cos x^2 + C$$

Note : لو التكامل محدود وبيجي أحلها التعويض بحوله كامل للدالة y بدل ما أرجعة لـ x يعني بوقف عند الخطوة إلي عندها وبعوض قيم y (قيم y بجيبها من خلال الفرض)

2) $\int x \sqrt{1-x^2} \, dx$

$$y = 1 - x^2$$

$$dy = -2x\,dx$$

$$\frac{-2}{-2} \int \sqrt{1-x^2}\, x\,dx = -\frac{1}{2} \int (\sqrt{y})(-2x\,dx)$$

$$= -\frac{1}{2} \int \sqrt{y}\, dy = -\frac{y^{\frac{3}{2}}}{3} + C = -\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}$$

3) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot dx$

$y = \sqrt{x} \qquad dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

$\frac{2}{2} \int \sin\sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$= 2 \int \sin\sqrt{x} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2 \int \sin y \, dy$

$= -2\cos y + c = -2\cos\sqrt{x} + c$

4) $\int \sec^2 x \tan^3 x \, dx$

$y = \tan x$

$dy = \sec^2 x \, dx$

$\int y^3 dy = \frac{y^4}{4} + c = \frac{(\tan x)^4}{4} + c$

5) $\int \frac{\cos(\pi/x)}{x^2} dx$

$y = \pi/x \qquad dy = -\pi/x^2 dx$

$\frac{dy}{-\pi} = \frac{1}{x^2} \cdot dx$

$\int \cos y \left(\frac{-dy}{\pi}\right) = \frac{-1}{\pi} \int \cos y \, dy$

$= \frac{-1}{\pi} \sin y + c = \frac{-1}{\pi} \sin(\pi/x) + c$

6) $\int \sec^3 x \tan x \, dx$

$\int \sec^2 x \sec x \tan x \cdot dx$

$y = \sec x$

$dy = \sec x \tan x \, dx$

$\int y^2 \, dy = \frac{(y)^3}{3} + c = \frac{(\sec)^3}{3} + c$

7) $\int x^2 \sqrt{2+x} \cdot dx$

هاهذه ما هي أي علاقه بيننم بس ألو طريقة حل

$y = 2 + x$ ـــ 1

$x = y - 2$ ـــ 2

$dx = dy$ ـــ 3

$\int (y-2)^2 \sqrt{y} \cdot dy = \cancel{\int (y-2)^2}$

$\int (y^2 - 4y + 4) \sqrt{y} \, dy$

$= \int y^{\frac{5}{2}} - 4 y^{\frac{3}{2}} + 4\sqrt{y} \cdot dy$

$= \frac{2 y^{\frac{7}{2}}}{7} - \frac{8 y^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{4 y^{\frac{3}{2}}}{3} + c$

بدلو الـ y بـ $2+x$ ـــ لترجع لـ x

18) $\int x(2x+5)^8 \, dx$

$y = 2x+5 \longrightarrow x = \frac{y-5}{2}$

$dy = 2\,dx$

$\frac{dy}{2} = dx$

$\int \frac{y-5}{2} (y^8) \frac{dy}{2} \longrightarrow \frac{1}{4} \int y^9 - 5y^8 \cdot dy$

$\Rightarrow \frac{1}{40} y^{10} - \frac{5}{36} y^9 + C \Rightarrow y = 2x+5$

نخلوها بدلالة x بدل y

" The FunDEMNTAl of calculus النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل "

النظرية عبارة عن اشتقاق التكامل:-

$$* \frac{d}{dx} \int_{F(x)}^{g(x)} h(t)\,dt = \frac{d}{dx} \left[s(t) \right]_{F(x)}^{g(x)}$$

فرضنا تكامل $h(t) \leftarrow s(t)$

$$\longrightarrow * \frac{d}{dx} \left(s(g(x)) - s(F(x)) \right)$$

يشتق

$$= h(g(x))\, g'(x) - h(F(x))\, F'(x)$$

* هاي برهانة النظرية

أمثلة -8

11 $g(x) = \int_{\tan x}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{2+t^4}}\, dt$, Find $g'(x)$?

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x^8}}(2x) - \frac{1}{\sqrt{2+\tan^4 x}} \sec^2 x$$

$$g'(x) = \frac{2x}{\sqrt{2+x^8}} - \frac{\sec^2 x}{\sqrt{2+\tan^4 x}}$$

12 if $\int_3^{2x} F(y)\, dy = \frac{1}{x^3+3} + c$, Find $F(4)$?

$$F(2x)\,2 - \cancel{F(3)}^{0}(0) = \frac{-3x^2}{(x^3+3)^2} + 0$$

$$= 2F(2x) = \frac{-3x^2}{(x^3+3)^2} \quad \text{---} (*)$$

$$F(2x) = F(4)$$

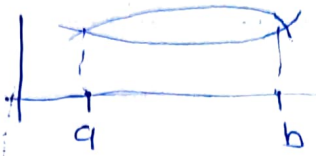
$$2x = 4 \quad \boxed{x=2} \longrightarrow \text{نعوض في } (*)$$

$$F(4) = \frac{-3(4)}{(8+3)^2} = \boxed{\frac{-6}{121}}$$

"Area between 2 curves" (المساحة بين منحنيين)

أحد تطبيقات التكامل وهي حساب المساحة بين أقترانين من خلال القانون التالي :-

$$A = \int_a^b |F(x) - g(x)| \, dx$$



1* حدود التكامل عبارة عن نقاط التقاطع طبعاً سنوجدها من خلال تساوي الأقترانين ببعض .

$$F(x) = g(x)$$

2* أشارة القيمة المطلقة يساعدنا نتخلص منه خطوة الرسم (معظم يطلب منك رسم بالامتحان بس أشي بسيط متحكين منه .

Ex :- Find the Area between two Function :-

1) $y_1 = x^2 - 2$, $x_1 = 0$ and $x = 1$

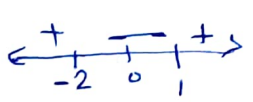
$y_2 = -x$

$x = 0$ and $x = 1$ هاي الحدود

a ↓ , b ↓

$$\int_0^1 |x^2 - 2 - (-x)| \, dx \longrightarrow \int_0^1 |x^2 + x - 2| \, dx$$

$(x+2)(x-1)$ بنحلها عبارة تربيعية



$$\longrightarrow -\int_0^1 x^2 + x - 2 \, dx \quad \ldots$$ كملوا الحل

2) $y_1 = e^{2x}$, $x = 0$ and $x = \ln 2$

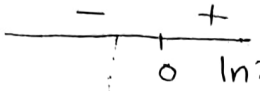
$y_2 = e^x$

$$\int_0^{\ln 2} |e^{2x} - e^x| \, dx$$

$e^{2x} - e^x = 0 \rightarrow e^x(e^x - 1) = 0 \rightarrow e^x \neq 0$

$e^x - 1 = 0$

$e^x = 1 \rightarrow x = 0$



$$\int_0^{\ln 2} e^{2x} - e^x \, dx \rightarrow$$ كل الحالتين

3) $y_1 = \sin x$ $y_2 = \cos x$, $x = 0$ $x = \pi/4$

$$\int_0^{\pi/4} |\cos x - \sin x|$$

بالفترة من $[0, \pi/4]$ $\cos$, $\sin$ (+) بالفترة هاي معناه بنشيل أشارة المطلق وبنحط أشارة موجب وبنكمل حل.

*استوات كل الحالتين:-

1) $\int e^2 \operatorname{sech}^2 x \tanh x \, dx$ 2) $\int_{-3}^{3} 3 - x^2 \cdot dx$

3) $\int 2^x \, dx$ 4) $\int_{-2}^{2} \frac{1 + \sin t}{e^2 + 1} \, dt$

5) $\int_0^1 (12 - 2x)^{10} \, dx$ 6) $\int_0^2 \sqrt{x+9} \cdot d$ 7) $\int_0^{\pi/2} \cos x \sin^2 x \, dx$

8) $\tanh 2x \operatorname{sech} 2x \, dx$ 9) Find $\frac{d}{dx} \int_3^{x^2} \frac{\sin t}{2t} \, dt$

10) The area between the region by $y = \sqrt{16 - x^2}$ and x-axis is?