ElCoM
ELECTRICAL COMPUTER MECHATRONICS

تقدم لجنة ElCoM الاكاديمية

دفتر فاينل لمادة:

تفاضل وتكامل 1

من شرح:

د.رانيا شقبوعة

جزيل الشكر للطالب:

لبنى عموش

Subject (Calculus) Date 17th . Oct No.

بسم الله الرحمن الرحيم

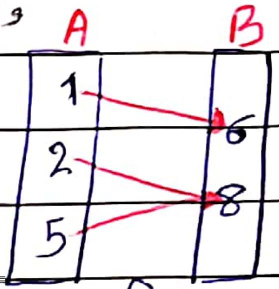
* Function * الاقتران

هو عبارة عن علاقة تربط بين مجموعتين

$f : A \longrightarrow B$

↳ يرتبط بعنصر واحد فقط

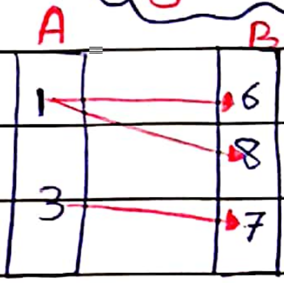
$y = f(x)$



(f)

Function

لأنه كل عنصر من A يرتبط بعنصر واحد من B



علاقة *Relation* (not function)

لأنه عنصر من A مرتبط بعنصرين من B

A: Domain المجال

$\{1, 2, 5\}$ (Input)

B: Range المدى

$\{6, 8\}$ (Output)

الصور للاقتران f

$f(1) = 6$

$f(2) = 8$

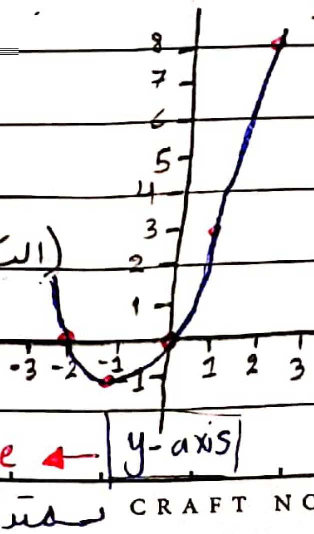
$f(5) = 8$

Ex: $f(x) = x^2 + 2x$ *Graph:

① نأخذ قيم لـ (x) ② نعوض في الاقتران

x	0	1	-1	2	-2
y=f(x)	0	3	-1	8	0

$(x, y) \rightarrow (0,0), (1,3), (-1,-1), (2,8), (-2,0)$ (الأزواج المرتبة)



(التوصيل بالرسم من اليسار إلى اليمين)

X-axis

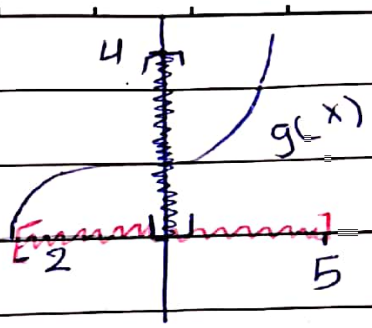
(Input) Domain

ويمثل كل الأعداد الحقيقية "R"

y-axis

(output) Range ← يمتد من -1 إلى ∞

ex:



(قيم x) Domain : [-2,5]

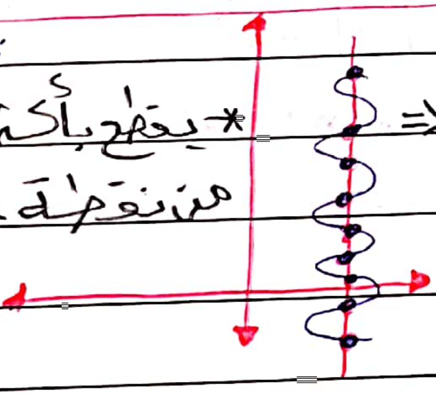
(قيم y) Range : [0,4]

* Vertical line Test : اختبار الخط العمودي

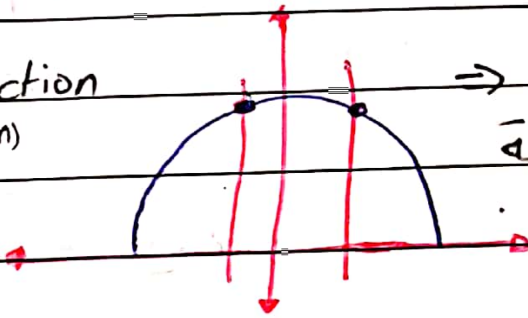
* نستطيع من خلاله معرفة أي شكل هل هو اقتران أو علاقة *

ex:

* يقطع بأكثر من نقطة *

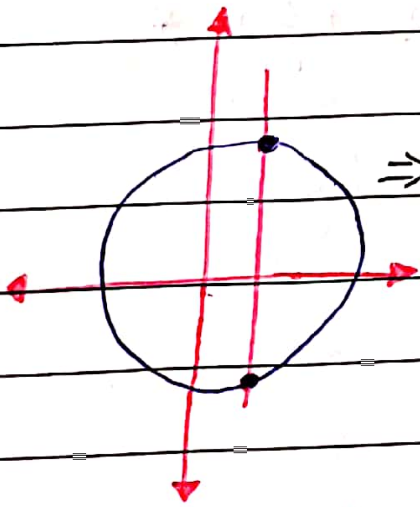


=> NOT Function (Relation)

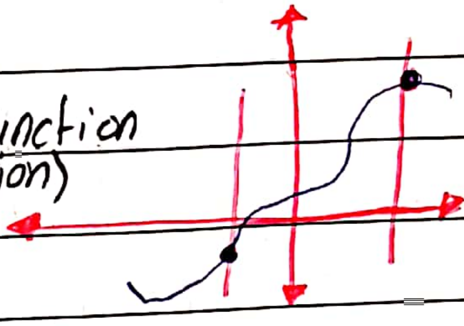


=> Function

* يقطع بنقطة واحدة .



=> NOT Function (Relation)



=> Function

Subject Date 17^{th} Oct No.

Types of function :

* Polynomials : $f(x) = a_n x^{n} + a_{n-1} x^{n-1} \ldots\ldots + a_1 x + a_0$

كثيرات الحدود. $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots\ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ (Real numbers)

(الأس) n : Integer عدد صحيح موجب فقط

* $f(x) = x^3 + 5x^2 + 10x - 1$ ✓ $\longrightarrow$ poly
* $f(x) = x^2 + 10x - 1$ ✓ $\longrightarrow$ poly quadratic function

كثير حدود من الدرجة الثانية

* $f(x) = x^{\frac{1}{2}} + 10x^2 + 1$ ✗ *ليس كثير حدود*
* $g(x) = x^{-2} + 10x$ ✗ *ليس كثير حدود*
* $h(x) = \sqrt{3x+1}$ ✗ *اقتران جذري* ليس كثير حدود*

(Root Function)

* $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+1}$ ✗ *اقتران نسبي* ليس كثير حدود*

(Rational Function)

* Absolute Value Function : $|f(x)|$

ex: $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \Longrightarrow$

Properties of Absolute Value:

1. $|-a| = |a|$
2. $|ab| = |a|\,|b|$
3. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$
4. $|a+b| \leq |a| + |b|$
5. $|x| = a \longrightarrow x = \pm a$
6. $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$ ($-a$, a)
7. $|x| \geq a \Rightarrow x \geq a$ or $x \leq -a$ ($-a$, a)

* Domain: $\mathbb{R}$

كل الأعداد الحقيقية

* Range: $[0, \infty[$

CRAFT NOTEBOOK

*Ex: Find the value of x:

$|2x-1| < 7$

$-7 < 2x-1 < 7$ ← على حسب الخاصية رقم $\boxed{6}$

$+1 \quad +1 \quad +1$

$\Rightarrow \frac{-6}{2} < \frac{2x}{2} < \frac{8}{2} \rightarrow -3 < x < 4$

$= (-3, 4)$

*Ex: $f(x) = |8-2x|$ piecewise Function?

نكتبه كاقتران متشعب ؟

$8-2x = 0$

① نساوي بالصفر

$2x = 8$

$\boxed{x = 4}$

② على خط الاعداد ونأخذ عدد أكبر وعدد أصغر لتحديد الإشارة .

$8-2x \qquad -(8-2x)$

$+ + + + \quad - - - - -$

4

$5 \Rightarrow 8-10 = -2$

$0 \Rightarrow 8$

* طريقة ثانية لتحديد الإشارة : لو كان اقتران خطي بشوف إشارة معامل x ← على يمين العدد وعكس الإشارة ← على يسار العدد

$$f(x) = \begin{cases} 8-2x, & x \le 4 \\ -8+2x, & x > 4 \end{cases}$$

Subject　　　　　　　　　　　　　　　　Date 17th oct No.

*قواعد أساسية لإيجاد المجال.

* Domain　　$y = f(x)$　　المجال ← *جميع قيم x إلي
Input　　مسموح أعوض فيها
بالاقتران *

* أغلب الـ Domain تحت مظلة
$\mathbb{R}$ Real numbers

*لكن باستثناء لحالات خاصة مسالب تحت الجذر
* القسمة على صفر.

① $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x - 1 \rightarrow D_f = \mathbb{R}$

- Domain (Poly) = $\mathbb{R}$

② $g(x) = |\text{poly}| \longrightarrow D = \mathbb{R}$

Ex: $g(x) = |x^2 + 5x - 1| \longrightarrow D = \mathbb{R}$

③ $g(x) = \frac{10}{x-5}$　　$x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$　　*نستثني أصفار

$x - 5 \rightarrow \neq 0$　　$D = \mathbb{R} - \{5\}$　　المقام*

④ $g(x)\ \sqrt[n]{f(x)}$, n even 2, 4, 6, ---

$\hookrightarrow \geq 0$

Ex: $f(x) = \sqrt{x-7}$ $\Rightarrow$ $x - 7 \geq 0$

$D_f = [7, \infty)$　　$x - 7 = 0 \rightarrow x = 7$

⑤ $g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$ $\Rightarrow$ n odd 3, 5, 7, -----

$D_g = D_f$　　(يعني بحسب Domain
ما داخل الجذر ونسى وجود الجذر)

Ex: $g(x)\ \sqrt[3]{\frac{1}{x+5}} \rightarrow \text{Domain}\left(\frac{1}{x+5}\right)$

$x + 5 = 0$　　$x = -5$

$D_g = \mathbb{R} - \{-5\}$

Subject   Date 17^{th} . Oct No.

(6) $f(x) = \frac{x^2}{x}$ * فقط بوخذ أصفار المقام *

Don't Simplify

بعد إيجاد الأصفار يمكن أن نبسط . $x = 0 \Rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$

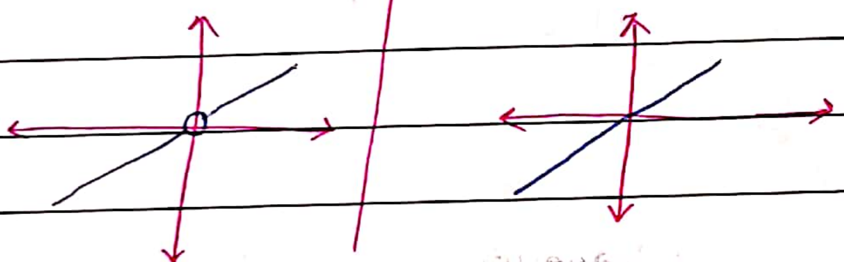
$\Rightarrow f(x) = x \, , \, x \neq 0$

ومهم كتابتها

لأنه تختلف كلياً عن $f(x) = x$

توضيح $\Leftarrow$

$f(x) = x \, , \, x \neq 0$ | $f(x) = x$



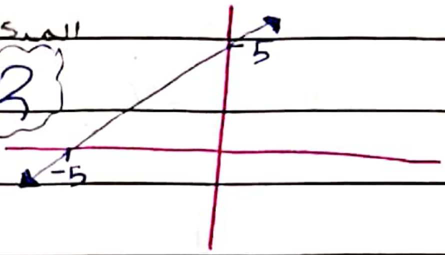
Subject Date 17th. oct No.

*Range : المدى $\qquad y = f(x)$

* قيم الصور عند التعويض بال Domain — Output

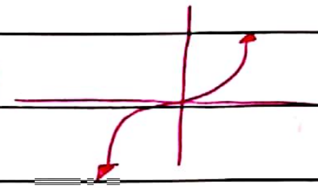
① $f(x) = x + 5$

$D_f = \mathbb{R} \Longrightarrow$ المدى $\mathbb{R}$



② $f(x) = x^3$

$D_f = \mathbb{R} \Longrightarrow$ المدى $\mathbb{R}$



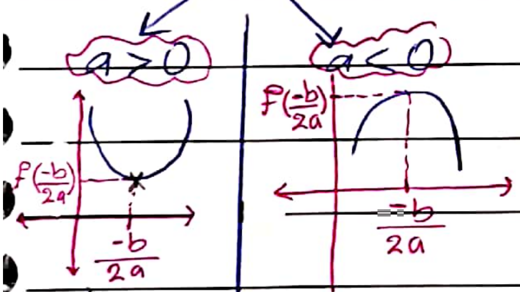
③ $f(x) = ax^2 + bx + c$

- للاقتران التربيعي :

Domain $\rightarrow \mathbb{R}$

Range $\rightarrow$??

يعتمد المدى على إشارة معامل x^2



* الرأس : $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

$a > 0$ — Range: $\left[f\left(\frac{-b}{2a}\right), \infty\right)$

$a < 0$ — Range: $\left(-\infty, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right]$

$\Rightarrow$ Ex: Range $f(x) = x^2 + 6x - 1$

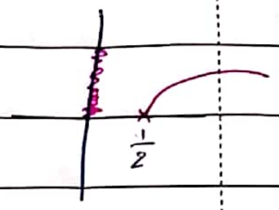
$\Rightarrow \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2} = -3$

$f(-3) = (-3)^2 + 6 \times -3 - 1 = -9 - 1 = -10$

Range $\rightarrow [-10, \infty)$

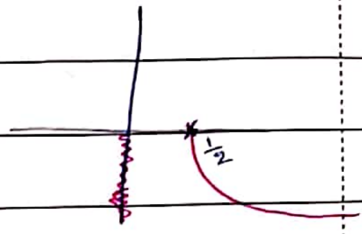
* $f(x) = \sqrt{2x-1}$

→ Range $[0, \infty)$



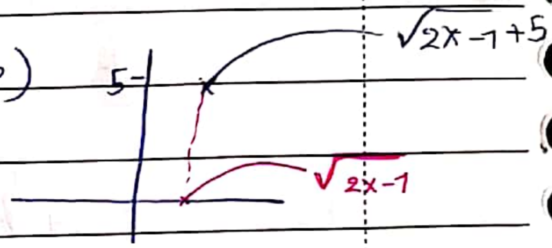
* $f(x) = -\sqrt{2x-1}$

→ $(-\infty, 0]$

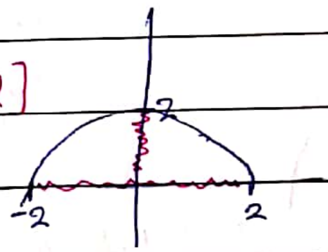


* $f(x) = \sqrt{2x-1} + 5$

→ Range $[5, \infty)$



* $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ * semicircle نصف *



$D_f : [-2, 2]$

Range : $[0, 2]$

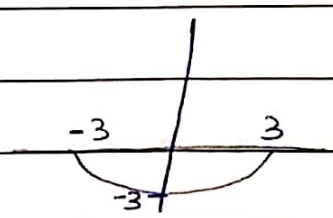
$\Rightarrow f(x) = \sqrt{a - x^2}$ $a \in R$

→ Domain $[-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$

→ Range $[0, \sqrt{a}]$

* $f(x) = -\sqrt{9 - x^2}$

$\sqrt{9} = 3$



Range : $[-3, 0]$

$9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow [-3, 3]$

* New functions from Old:

$f, g \to (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

$(fg)(x) = f(x)\,g(x)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$

اقترانين f, g ينتج عنهم 6 new functions.

$f+g \,/\, f-g,\ g-f \,/\, fg \,/\, \frac{f}{g}, \frac{g}{f}$

Ex: $f(x) = 1 - \sqrt{x-2}$, $g(x) = x - 4$

① $(f+g)(7) = f(7) + g(7)$

$= 1 - \sqrt{7-2} + 7 - 4 = 1 - \sqrt{5} + 3 = 4 - \sqrt{5}$

② $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

$= 1 - \sqrt{x-2} - (x-4) = 1 - \sqrt{x-2} - x + 4 = 5 - x - \sqrt{x-2}$

③ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 - \sqrt{x-2}}{x-4}$

* $f, g \longrightarrow \text{Domain}(f+g, f-g, fg) = D_f \cap D_g$

$\text{Domain}\left(\frac{f}{g}\right) = D_f \cap D_g - \underbrace{\{x : g(x) = 0\}}$

باستثناء أصفار المقام

Ex: $f(x) = 1 - \sqrt{x-2}$ $g(x) = x - 4$

① Domain $(fg)(x) \longrightarrow D_f \cap D_g$

$= [2, \infty) \cap \mathbb{R}$

$= [2, \infty)$

$D_f: x - 2 \geq 0$

$x \geq 2 \Rightarrow D_f = [2, \infty)$

$D_g = \mathbb{R}$

Subject Date 21^{th}. Oct No.

② Domain $\left(\frac{g}{f}\right)(x) \longrightarrow D_f \cap D_g - \{x : f(x) = 0\}$

$\therefore D_{\left(\frac{g}{f}\right)(x)} = [2, \infty) - \{3\}$
$= [2, 3) \cup (3, \infty)$

$f(x) = 0$
$\Rightarrow 1 - \sqrt{x-2} = 0$
$= 1 = \sqrt{x-2}$ $\hat{}\,2$ تربيع
$1 = x - 2$
$x = 3$

*Ex: find the domain:

1) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-4}{x-4}} \Rightarrow \geq 0 \rightsquigarrow \frac{x^2-4}{x-4} \geq 0$

⊛ $x^2 - 4 = 0$ البسط
$x = \pm 2$

نفس عكس نفس
$++ \quad --- \quad ++$; -2, 2

* الأطراف نفس إشارة والمنتصف عكس x^2

⊛ $x - 4 = 0$ المقام
$x = 4$

$------ \quad -- \quad ++$; 4

⊛ $\frac{x^2-4}{x-4}$ $\frac{\text{البسط}}{\text{المقام}}$

$--- \quad ++++ \quad --- \quad ++++$; -2 ✓ 2 4 ✓

المناطق الموجبة تمثل ال Domain

$\therefore D_f = [-2, 2] \cup (4, \infty)$

2) $f(x) = \sqrt{|x-1| - 4} + \frac{\sqrt{2x-1}}{3-x}$

$\Rightarrow \sqrt{|x-1| - 4}$
$\Rightarrow |x-1| - 4 \geq 0$
$|x-1| \geq 4$ — or: $x - 1 \geq 4$, $x - 1 \leq -4$
$\Rightarrow x \geq 5$, $x \leq -3$
$[5, \infty) \cup (-\infty, -3]$

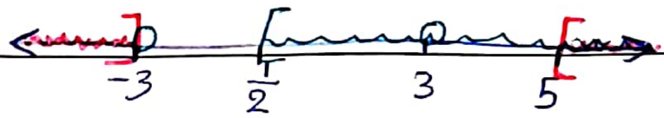
$\Rightarrow \frac{\sqrt{2x-1}}{3-x}$ $\rightsquigarrow 2x - 1 \geq 0 \to 2x \geq 1$
$3 - x \to R$ $\Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$ $[\frac{1}{2}, \infty)$

$[\frac{1}{2}, \infty) \cap R - \{3 - |x| = 0\}$
$[\frac{1}{2}, \infty)$
$3 = |x|$
$x = \pm 3$
$[\frac{1}{2}, \infty) - \{\pm 3\}$

$[5, \infty) \cup (-\infty, -3] \cap [\frac{1}{2}, \infty) - \{\pm 3\}$ → يتبع

Subject Date 21th. Oct No.

$$\Rightarrow [5,\infty)\cup(-\infty,-3] \cap [\tfrac{1}{2},\infty)-\{\pm 3\}$$



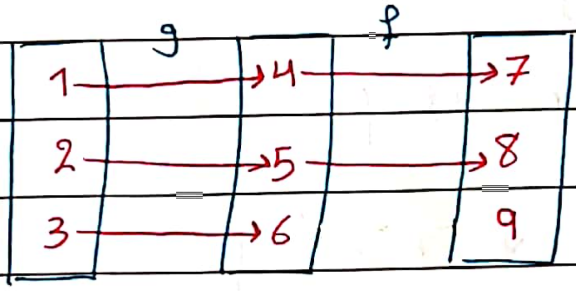
المنطقة الي تلونت باللونين هي Domain

$$D_f=[5,\infty)$$

Composition of Functions

$$(f\circ g)(x) = \underset{②}{f}(\underset{①}{g(x)})$$

$$(g\circ f)(x) = \underset{②}{g}(\underset{①}{f(x)})$$



$(f\circ g)(1) = f(g(1)) = f(4) = 7$

$(f\circ g)(2) = f(g(2)) = f(5) = 8$

$(f\circ g)(3) \longrightarrow f(g(3)) = f(6)$

$\notin D_{f\circ g}$

ليس لها صورة

$\therefore 6 \notin D_f$ (undefined)

$D_{f\circ g} = \{1,2\}$, $D_f = \{4,5\}$

جزء منه $D_g = \{1,2,3\}$

$*D_{f\circ g} = \{x\in D_g \ \& \ g(x)\in D_f\}$

$*D_{g\circ f} = \{x\in D_f \ \& \ f(x)\in D_g\}$

Subject

Date 21^{th}. Oct No.

$* Ex: f(x) = x^2 - 1 \qquad g(x) = \sqrt{3-x}$

① $(f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(\sqrt{3-(-1)}) = f(2) = 2^2 - 1 = 3$

② $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 1) = \sqrt{3-(x^2-1)}$

$= \sqrt{3 - x^2 + 1} = \sqrt{4 - x^2}$

③ $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{3-x}) = (\sqrt{3-x})^2 - 1$

$= 3 - x - 1 = 2 - x$

$\therefore g \circ f \neq f \circ g$

$\rightarrow D_f, \; D_g, \; D_{f \circ g}, \; D_{g \circ f}$?

$D_f \downarrow R$

$D_g \downarrow$

$3 - x \geq 0$

$3 \geq x \rightarrow (-\infty, 3]$

$D_{f \circ g} = \{ x \in D_g \;\&\; g(x) \in D_f \}$

$= \{ \underline{x \in (-\infty, 3]} \;\&\; \underbrace{\sqrt{3-x}}_{\text{True}} \in R \}$

دائماً تنزل كما هي .

لأنه $x \in (-\infty, 3]$

وهاي القيم دائماً تنتمي إلى R

$\therefore D_{f \circ g} = (-\infty, 3]$

$D_{g \circ f} = \{ x \in D_f \;\&\; f(x) \in D_g \}$

$\{ x \in R \;\&\; x^2 - 1 \in (-\infty, 3] \}$

$\{ x \in R \cap x \in [-2, 2] \}$

$\therefore D_{g \circ f} = [-2, 2]$

$x^2 - 1 \in (-\infty, 3]$

$x^2 - 1 \leq 3$

$x^2 - 4 \leq 0$

$x^2 - 4 = \rightarrow x = \pm 2$

$+++ [- - - -] +++$

$-2 \qquad 2$

$x \in [-2, 2]$

CRAFT NOTEBOOK

Subject Date 21^{th} Oct No.

Ex: $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, $g(x) = \frac{x}{1-x}$

Find domain fog & gof ?

$D_f = R - \{1\}$, $D_g = R - \{1\}$

$D_{fog} = \{x \in D_g \ \& \ g(x) \in D_f\}$

$\{x \in R - \{1\} \ \& \ \frac{x}{1-x} \in R - \{1\}\}$

$\{x \in R - \{1\} \cap x \in R - \{\frac{1}{2}\}\}$

$D_{fog} = R - \{\frac{1}{2}, 1\}$

$\frac{x}{1-x} \in R - \{1\}$

$\frac{x}{1-x} \neq 1$

* نساوي الاقتران بـ 1 وثم نستثني العدد الناتج

$\frac{x}{1-x} \times 1$

$x = 1 - x$

$2x = 1$ $x = \frac{1}{2}$

$\therefore x \in R - \{\frac{1}{2}\}$

$D_{gof} = \{x \in D_f \ \& \ f(x) \in D_g\}$

$= \{x \in R - 1 \ \& \ \frac{1+x}{1-x} \in R - \{1\}\}$

$= \{x \in R - \{1\} \cap x \in R - \{0\}\}$

$D_{gof} = R - \{1, 0\}$

$\frac{1+x}{1-x} \in R - \{1\}$

$\frac{1+x}{1-x} \neq 1$

$\frac{1+x}{1-x} \times 1$

$1 + x = 1 - x$

$2x = 0$

Subject Date 21th. Oct No.

Ex: Find the domain $f(x)=\sqrt{2-\sqrt{x}}$ اقتران مركب

لأنه جذر تربيعي $x \geq 0$ & $2-\sqrt{x} \geq 0$

* دائماً الجزء الأول ما بده اشي بنزل زي ما هو
* الجزء الثاني بده شغل

$[0,\infty) \cap x \in (-\infty,4]$

* بلاقي التقاطع على خط الأعداد

0 4

المنطقة المشتركة بالوسط هي الـ Domain

$2-\sqrt{x} \geq 0$

$2-\sqrt{x}=0$

$2=\sqrt{x}$ ^2

$x=4$

* بوخد رقم أكبر $9 \Rightarrow 2-\sqrt{9}=2-3=-1$

وأصغر $1 \Rightarrow 2-\sqrt{1}=2-1=1$

عشان أحدد الإشارة

$D_f=[0,4]$ input

للاقتران $\sqrt{2-\sqrt{x}}$

Ex: $(f\circ g)(x)=x^2+6x+6$ $g(x)=x+1$

Find $f(x)$

$(f\circ g)=f(g(x))=x^2+6x+6$

$=f(x+1)=x^2+6x+6$

$f(y)=(y-1)^2+6(y-1)+6$

$y=x+1$

$|x=y-1|$

كل x بالاقتران بعوض مكانها $y-1$

السؤال بده x فقط فأنا عندي x+1 مساوية عشتغلي ما

Find $f(2)$??

① $f(2)=(2-1)^2+6(2-1)+6$

$=13.$ ✓

OR

② $f(x+1)=(x)^2+6(x)+6$ $x+1=2$

$x=1$

$f(1+1)=1^2+6\times1+6$

$f(2)=1+6+6=13.$ ✓

وبعوضها بدل x

CRAFT NOTEBOOK

Subject Date 21th. Oct No.

$(f\circ g)(x) = 3x^2 + 3x + 2$

$f(x) = 3x + 5$ find $g(x)$??

$\underbrace{f(g(x))} = 3x^2 + 3x + 2$

نطبقها باقتران
ق

$3g(x) + 5 = 3x^2 + 3x + 2$

$3g(x) = 3x^2 + 3x - 3 \quad \div 3$

$g(x) = x^2 + x - 1$

find $g(2)$

$g(2) = 4 + 2 - 1 = 5$

Subject Date 21th. Oct No.

Even and odd function

$f(-x)$

→ $f(-x)=f(x)$ Even $[\,|x|,\ x^2,\ x^4,\ x^6 \dots]$

Ex: $f(x) = x^2$ → even

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

$f(-2) = f(2) = 4$

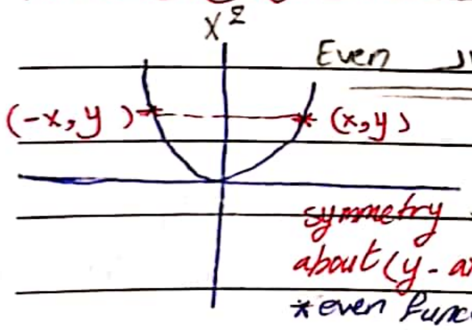
→ $f(-x) = -f(x)$ odd $[x,\ x^3,\ x^5,\ x^7 \dots]$

Ex: $f(x) = x^3$

$f(-x) = (-x)^3 = -x = -f(x)$

$f(-2) = -8$
$f(2) = 8$
متساويين عدديًا لكن مختلفين بالإشارة.

→ $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$ Not even Not odd Neither

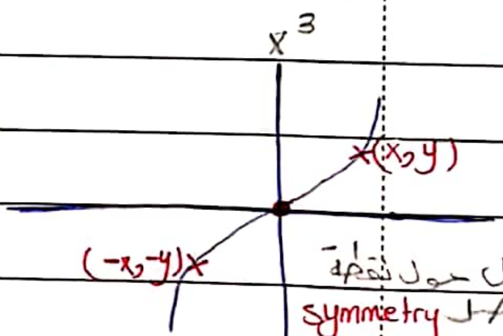


مثال للرسمة الـ Even

تماثل حول محور الصادات: symmetry about (y-axis)

even function

مثال لرسمة الـ odd



تماثل حول نقطة الأصل symmetry about (the origin)

odd function

Subject Date 21^{th}.oct No.

Ex: even, odd, neither ??   كيف نميز

1) $f(x) = 1 - x^4$ — Even ∴ نفس الاقتران الأصلي

$f(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4$ [Even ♡]

2) $f(x) = x^5 + x$ — Not Even

$f(-x) = (-x)^5 + (-x) = -x^5 - x = -(x^5 + x) = -f(x)$ [odd]

3) $f(x) = 2x - x^2$ — Not Even, Not odd.

$f(-x) = 2(-x) - (-x^2) = -2x - x^2 \neq f(x)$

$\neq -f(x)$

[Neither]

4) $f(x) = \dfrac{x^5 + x \ (\text{odd})}{1 - x^4 \ (\text{Even})} \Rightarrow$

$= \text{odd}$

*÷	Even (+)	odd (−)
(+) Even	Even	Odd
(−) odd	Odd	Even

OR

$f(-x) = \dfrac{(-x)^5 + (-x)}{1 - (-x)^4} \neq f(x)$

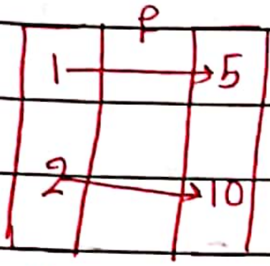
$\rightarrow \dfrac{-x^5 - x}{1 - x^4}$ نسحب إشارة السالب إما من البسط أو من المقام

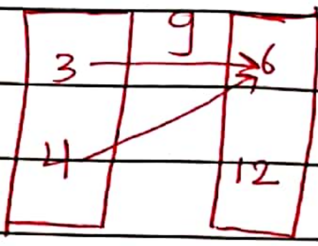
$= -\left(\dfrac{x^5 + x}{1 - x^4}\right) = -f(x)$

∴ Odd #

One - One Function

* A function f is called a 1-1 function if it never takes on the same value twice.
That is $f(x_1) \neq$ whenever $x_1 \neq x_2$



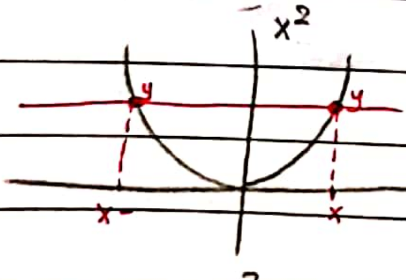


$f(1) = 5$
$f(2) = 10$
1-1

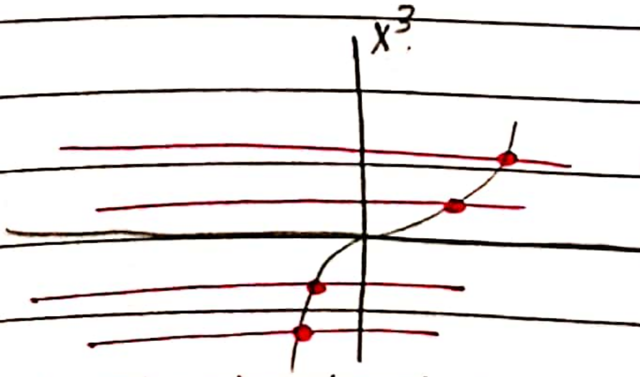
$g(3) = 6$
$g(4) = 6$ $\quad 3 \neq 4$
Not 1-1

Ex : $f(x) = x^2$ Not 1-1
$\hookrightarrow f(-2) = f(2) = 4 \qquad 2 \neq -2$

*يعرف إذا الاقتران 1-1 بالرسم عن طريق
Horizontal line اختبار الخط الأفقي
Test :



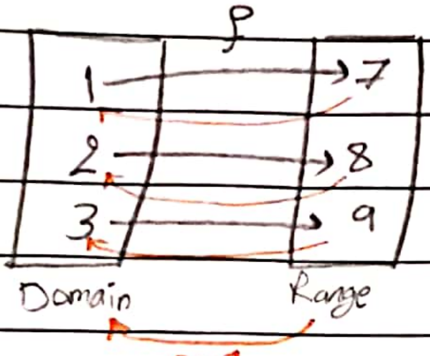
إذا يقطع بنقطتين أو أكثر
نقطة بكون Not 1-1



قطع بنقطة واحدة
$\therefore$ 1-1

Subject Date 24th. Oct No.

Inverse Function:



$f(1) = 7$ $f^{-1}(7) = 1$
$f(2) = 8$ $f^{-1}(8) = 2$
$f(3) = 9$ $f^{-1}(9) = 3$

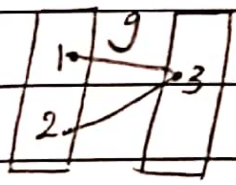
* توضيح: بصير الـ Range للاقتران الاصلي (f)
بصير هو Domain (f^{-1}) والعكس صحيح

$D(f)\ \{1, 2, 3\}$ $Range(f)\ \{7, 8, 9\}$

$D(f^{-1})\ \{7, 8, 9\}$ $Range(f^{-1})\ \{1, 2, 3\}$

Thm: $D_f = Range\ f^{-1}$
$D_{f^{-1}} = Range\ f$

* مو كل الاقترانات بقدر أوجدلها الـ Inverse *



$g(1) = 3$ Not 1-1 $g^{-1}(3)$?
$g(2) = 3$

هل صورتها 1 أو 2؟

= ما بصير الاقتران يكون إله صورتين

يعني ما في إله g^{-1} لأنه Not 1-1

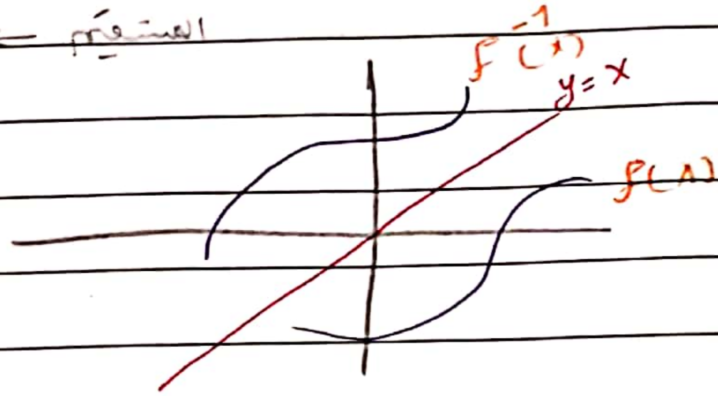
Thm: A function f has an inverse if it is 1-1

يعني اقتران 1-1 أكيد إله inverse

Subject Date 24th oct No.

* علاقة الاقتران f بال f^{-1} * علاقة انعكاس حول

المستقيم ← $\boxed{y = x}$



* find $f^{-1}(x)$??

- نكتب الاقتران على شكل معادلة ونخلي x موضوع القانون
- نكتبه بدلالة $f^{-1}(x)$ ومكان كل y نحط x

① $f(x) = 5x^3 + 7$

$y = 5x^3 + 7$

$5x^3 = y - 7 \quad \div 5$

$x^3 = \frac{y-7}{5} \quad \hat{}\ \frac{1}{3}$: تكعيبي -

$x = \left(\frac{y-7}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$

$f^{-1}(x) = \left(\frac{x-7}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$

② $f(x) = \sqrt[5]{2x-1}$

$y = (2x-1)^{\frac{1}{5}} \quad \hat{}\ 5$

$y^5 = 2x - 1$

$2x = y^5 + 1 \quad \div 2$

$x = \frac{y^5 + 1}{2}$

$f^{-1}(x) = \frac{x^5 + 1}{2}$

Subject Date 24th . oct No.

*Ex: $f(x) = \dfrac{3x+5}{2x-1}$ | Find | D_f, $f^{-1}(x)$, Range f ??

أصفار المقام

1) $D_f \Rightarrow 2x-1=0 \rightarrow 2x=1 \rightarrow x=\frac{1}{2}$ $\quad * D_f = R - \{\frac{1}{2}\}$

2) $f^{-1}(x) \Rightarrow y = \dfrac{3x+5}{2x-1} = 3x+5 = 2xy - y$

$= 2xy - 3x = y+5$

$= \dfrac{x(2y-3)}{2y-3} = \dfrac{y+5}{2y-3}$

$\Rightarrow x = \dfrac{y+5}{2y-3}$

$= f^{-1}(x) = \dfrac{x+5}{2x-3}$

3) Range f = Domain f^{-1} $= \dfrac{x+5}{2x-3}$ $\rightarrow 2x-3=0 \rightarrow x=\frac{3}{2}$

Range f = Domain f^{-1} = $R - \{\frac{3}{2}\}$

* Restricting Domain : لما يطلب f^{-1} لاقتران مش 1-1

(اقتطاع من ال Domain)

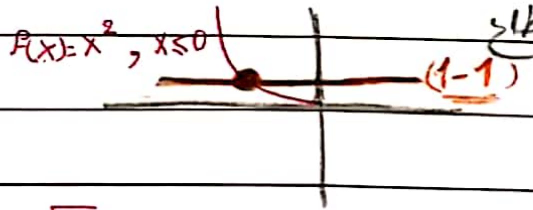
~~$f(x) = x^2$ Find $f^{-1}(x)$~~ $\quad x^2$ not 1-1

الطريقة الصحيحة $f(x) = x^2$, $x \le 0$ Find $f^{-1}(x)$?

$y = x^2 \rightarrow \sqrt{\ }$

$\sqrt{y} = \ominus x$

لأنه بالسؤال $x \le 0$



توضيح الاقتطاع

$x = -\sqrt{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

Subject Date 24th. Oct No.

Ex : $f(x) = 3x^2 + 6x - 6 \quad , \quad x \geq -1$

$y = 3x^2 + 6x - 6 \quad \div 3$ عشان أخلي المعادلة *

$\frac{y}{3} = x^2 + 2x - 2$ بدلالة x رح أعمل إكمال مربع

① معامل $x^2 \Leftarrow (1)$

② $+ \left(\frac{b}{2}\right)^2$ ← $\left(\frac{2}{2}\right)^2 = (1)$

$\frac{y}{3} + 1 = (x^2 + 2x + 1) - 2$

جذر جذر

$\frac{y}{3} + 1 = (x + 1)^2 - 2$

$+2 \qquad\qquad +2$

$\frac{y}{3} + 3 = (x + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{\ }$

$\sqrt{\frac{y}{3} + 3} = x + 1$ أخذت الجذر الموجب

$-1 \qquad -1$ لأنه عندي بالسؤال $x \geq -1$

$x = \sqrt{\frac{y}{3} + 3} - 1$

$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{3} + 3} - 1$ ※

Ex : $f(x) = x^3 + 5x - 2$ Fnd $f^{-1}(4)$?

بساويها مباشرة بالاقتران

$4 = x^3 + 5x - 2$

$x^3 + 5x - 6 = 0$ → $\{\pm 1 / \pm 2 / \pm 3 / \pm 6$

$\hookrightarrow 1^3 + 5(1) - 6 = 0$ ✓

$f^{-1}(4) = 1$

$f(1) = 1^3 + 5 - 2 = 4$ ※

$f \circ g \neq g \circ f$ ⇐ لكن لو سؤال inverse ، حيصيروا متساويين

Thms: $(f \circ f^{-1})(x) = x \quad , \forall \boxed{x \in D_{f^{-1}}}$

$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad , \forall \boxed{x \in D_f}$

Ex: Determine whether f & g are inverse functions:

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \quad , \quad g(x) = x^{\frac{1}{3}} - 1$

$f(x) = (x+1)^3$

* ح2 استخدم النظرية :

$(f \circ g)(x) = x$

$(g \circ f)(x) = x$?

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^{\frac{1}{3}} - 1) = (x^{\frac{1}{3}} \cancel{-1} \cancel{+1})^3 = x$ ✓

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g((x+1)^3) = ((x+1)^3)^{\frac{1}{3}} - 1 = x + 1 - 1 = x$ ✓

$\therefore f, g$ are inverse functions

→ Sol 2:

$f(x) = y \Rightarrow f^{-1}(x) = g(x)$

أو

$g(x) = y \Rightarrow g^{-1}(x) = f(x)$

* Exponenatial function: الاقتران الأسي

$f(x) = b^x$, $b > 0$ and $b \neq 1$

Ex: $f(x) = 2^x$

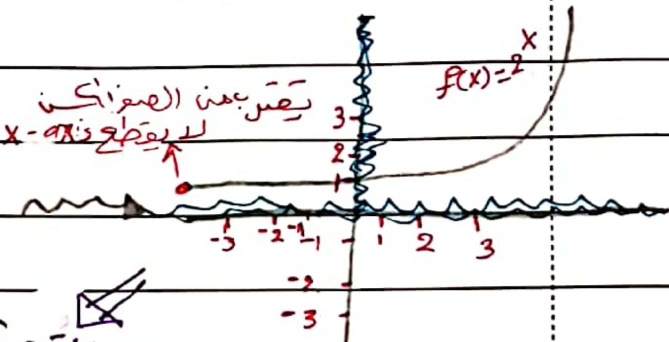
X	2^x
0	$2^0 = 1$
2	$2^2 = 4$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}$	$\sqrt[3]{2}$

$(0,1)$

$(2,4)$

$(-1,\frac{1}{2})$

$(\frac{1}{3},\sqrt[3]{2})$



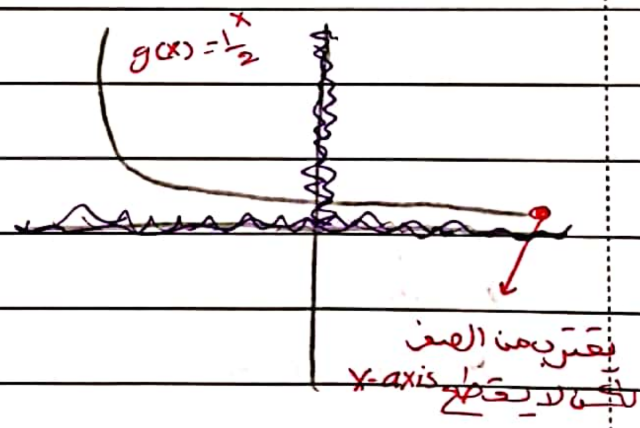
رسمات مشابهة:

$3^x, 4^x, 5^x, e^x$

b^x, $b>1$

Domain: R

Range: $(0,\infty)$



$3^{-x} \leftarrow (\frac{1}{3})^x, e^{-x}$

b^x $0<b<1$

* The natural exponential function:

$f(x) = e^x$ $e \approx 2.718\ldots$ العدد النيبيري

Domain: R Range: $(0,\infty)$

$f(2) = e^2$

$f(0) = e^0 = 1$

Subject Date 26^{th}. Oct No.

Find the domain:

① $f(x) = 2^{\sqrt{x^2-9}}$ → $x^2-9 \geq 0 \Rightarrow x^2-9=0$ $x = \pm 3$

R

$+ \quad - \quad +$

$-3 \quad 3$

$D_f = (-\infty, 3] \cup [3, \infty)$

② $f(x) = \frac{1}{e - e^{2x}}$ → $(e^x)^2 = e^x * e^x$

$e^x - e^{2x} = 0 \Rightarrow e^x(1-e^x) = 0$

$e^x \neq 0$ / $1 - e^x = 0 = 1 = e^x$

$(0, \infty)$ Rangeلا عن ←

$x = 0$ $(e^0 = 1)$

$D_f = R - \{0\}$

③ $f(x) = \sqrt{1-2^x}$

$1 - 2^x \geq 0$ $1 - 2^x = 0$ $1 = 2^x \Rightarrow x = 0$

$+ + + \quad 0 \quad - - -$

$1 - 2^{-1} = 1 - \frac{1}{2} = \oplus\frac{1}{2}$ ← -1 1 → $1 - 2^1 = \ominus 1$

$D_f = (-\infty, 0)$

Subject Date 26^{th}. Oct No.

logarithmic functions:

$$f(x) = \log_b x \quad , b>0 \text{ and } b \neq 1$$

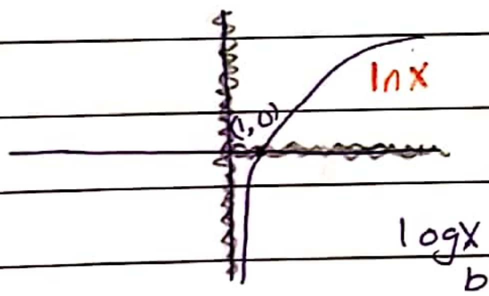
Ex ⇒ $\log_2 8 = 3 \Rightarrow (2^3 = 8)$

$\log_9 3 = \frac{1}{2} \Rightarrow (9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3)$

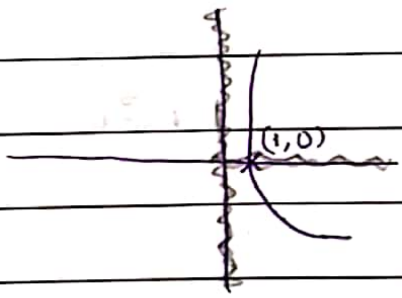
$\log_{10} \frac{1}{1000} = -3 \Rightarrow (10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000})$

$\log_{12} 12 = 1 \Rightarrow (12^1 = 12) \; \{\log_b b = 1\}$

$\log_2 1 = 0 \Rightarrow (2^0 = 1) \; \{\log_b 1 = 0\}$



$b>1$



$\log_b x$

$0<b<1$

$\ln x \,/\, \log_3 x \,/\, \log_2 x$ ...

$\log_{\frac{1}{2}} x \,/\, \log_{\frac{1}{3}} x$ ....

Domain : $(0, \infty)$

Range : $\mathbb{R}$

* The natural log function:

$\log_e x = \ln x$ Domain : $(0, \infty)$ / Range : $\mathbb{R}$

Note : $\log_{10} x = \log x$

يعني لو ما حطيت أساس رح أعرف إنه الأساس $\boxed{10}$

Subject Date 26th . Oct No.

* Algebric propositions of log :

$b>0 \quad b\neq 1 \quad , \quad a,c>0 \quad r\in \mathbb{R}$

1. $\log_b(ac) = \log_b a + \log_b c$

2. $\log_b(\frac{a}{c}) = \log_b a - \log_b c$

3. $\log_b(\frac{1}{c}) = -\log_b c \rightsquigarrow (\overset{0}{\cancel{\log_b 1}} - \log_b c)$

4. $\log_b a^{r} = r\log_b a$

5. $\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b} = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ أنا بختار الأساس إلي بدي إياه

ex: $\log_{1000} 100 = \frac{\log_{\square} 100}{\log_{\square} 100} = \frac{2}{3}$

اخترت الأساس 10

$\log_7 2 = \frac{\ln 2}{\ln 7}$

6. $\log_b b = 1$

7. $\ln e = 1 \quad (\log_e e = 1)$

8. $\log_b 1 = 0$

9. $\ln 1 = 0 \quad (\log_e 1 = 0)$

Subject Date 26th. Oct No.

* Simplify :

1. $\log\left(\frac{xy^5}{\sqrt{z}}\right)$

$= \log(xy^5) - \log\sqrt{z}$

$= \log x + \log y^5 - \log z^{\frac{1}{2}}$

$= \log x + 5\log y - \frac{1}{2}\log z$

* Find the exact value

$(\log_2 6 - \log_2 15) + \log_2 20$

$(\log_2 \frac{6}{15} + \log_2 20)$

$\log_2\left(\frac{\cancel{6}^{2}}{\cancel{15}_{\cancel{5}\,1}} \times \cancel{20}^{4}\right)$

$= \log_2 8 = 3$

* Find the domain :

1. $f(x) = \ln(x-9)$ $(0, \infty)$

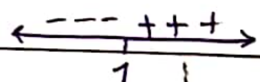
$x - 9 > 0 \Rightarrow x > 9$

$D_f : (9, \infty)$

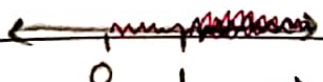
2. $f(x) = \ln(\ln x)$

$= \underline{x > 0}$ and $\underline{\ln x > 0} \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

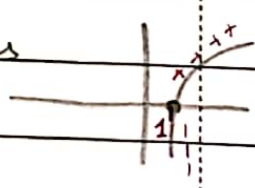
$(0, \infty) \cap (1, \infty)$



بنعرفها برضو بالرسمة



$\Rightarrow D_f = (1, \infty)$



3) $f(x) = \log_7 \left(\frac{4x-2}{2+x}\right) \longrightarrow \frac{4x-2}{2+x} > 0$

$4x-2=0$ البسط $- - - -$ $+ + + +$

$x = \frac{1}{2}$

$2+x=0$ المقام $- - -$ $+ + + + + + + + +$

$x=-2$

		-2		$\frac{1}{2}$	
البسط / المقام	$+ + + +$		$- - -$		$+ + + +$

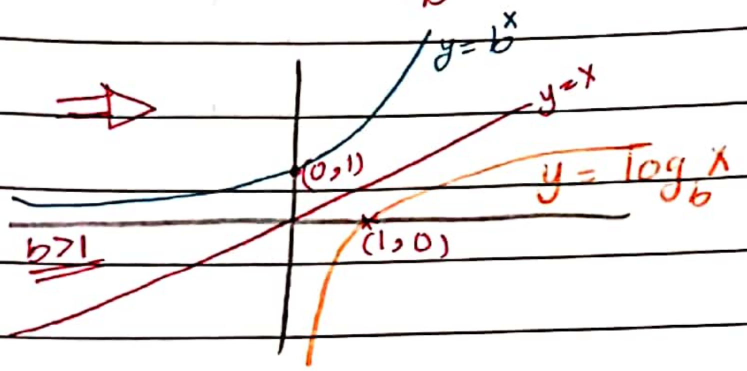
$(-\infty, -2) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$ ✓

Subject Date 28^{th} Oct No.

$f(x) = b^x \quad \boxed{\mathbb{R}} \to \boxed{(0, \infty)}$ $\qquad b > 0, \ b \neq 1$

$g(x) = \log_b x \quad \boxed{(0, \infty)} \to \boxed{\mathbb{R}}$

Thm: b^x, $\log_b x$ are inverse functions



* **Ex** find $f^{-1}(x)$

① $f(x) = 5^x \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_5 x$

② $g(x) = \log_7 x \Rightarrow g^{-1}(x) = 7^x$

③ $f(x) = e^x \Rightarrow f^{-1}(x) = \ln x$

$\boxed{(f \circ f^{-1})(x) = x}$

$f(x) = b^x$, $f^{-1}(x) = \log_b x$

$f(f^{-1}(x)) = x$

$f(\log_b x) = x$

نعوض $b^{\log_b x} = x$

$\hookrightarrow e^{\ln x} = x$

$\boxed{(f^{-1} \circ f)(x) = x}$

$f^{-1}(f(x)) = x$

$f^{-1}(b^x) = x$

نعوض $\log_b b^x = x$

$\hookrightarrow \ln e^x = x$

Subject Date 28^{th} oct No.

* Ex: ① $5^{\log_5 x} = x$

② $\ln e^2 = 2$

③ $\log_9 9^x = x$

④ $e^{-2\ln 5} = e^{\ln 5^{-2}} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

* Ex: find Domain and Range $f(x) = \frac{(e^x - 1)}{e^x + 3} \to R$

$e^x + 3 = 0 \quad e^x = -3$ X

لأنه $(0, \infty)$

$\therefore D_f = R$

عشان ألاقي ال Range بطلع f^{-1} وأوجد ال Domain إله

$y = \frac{e^x - 1}{e^x + 3} \qquad ye^x + 3y = e^x - 1$

$ye^x - e^x = -1 - 3y$

$\frac{e^x(y-1)}{y-1} = \frac{-1-3y}{y-1}$

$e^x = \frac{-1-3y}{y-1}$

عشان أخلي x لحالها لازم

أتخلص من e عن طريق

أحط ln للطرفين

$\ln e^x = \ln\left(\frac{-1-3y}{y-1}\right)$

$x = \ln\left(\frac{-1-3y}{y-1}\right) \rightsquigarrow f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{-1-3x}{x-1}\right)$

Domain(f^{-1}) = Range (f)

$\Rightarrow \frac{-1-3x}{x-1} > 0$

البسط: +++ | −−−− ($-\frac{1}{3}$)

المقام: −−−−− | +++ (1)

البسط / المقام: −−−−− | +++ | −−− ($-\frac{1}{3}$, 1)

$D_{f^{-1}} = (-\frac{1}{3}, 1) = \text{Range } f$ ✱

Subject Date 26th. Oct No.

Solve :

① $2^{x-5} = 3 \Rightarrow \log_2 2^{x-5} = \log_2 3 \longrightarrow x-5 = \log_2 3$

نعطي $\log_2$ للطرفين

عشان أخلي x موضوع القانون

$$\boxed{x = \log_2 3 + 5}$$

② $\ln(x+1) = 5 \Rightarrow e^{\ln(x+1)} = e^5$

نعطي e أساس للطرفين

$\Rightarrow x+1 = e^5 \rightarrow \boxed{x = e^5 - 1}$

③ $\log x^{2} + \log x = 30 \rightarrow 2\log x + \log x = 30$

نجمع

$3 \log x = 30 \quad \div 3$

$\log_{10} x = 10 \qquad x = 10^{10}$

④ $e^{2x} - e^x = 6 \rightarrow e^{2x} - e^x - 6 = 0$ نفرض $e^x = y$

تحويل معادلة تربيعية $y^2 - y - 6 = 0$

$(y-3) \;/\; (y+2) = 0$

$= y = 3 \;/\; y = -2$

$e^x = 3 \rightarrow (\ln) \;/\; e^x = -2$ X $(0, \infty)$

$$\boxed{x = \ln 3}$$

⑤ $(x^2-1)(x-5)\,x^3 \log_x 2x = 0$ نفرض $\{\frac{1}{2}, 5\}$ مجموعة الحل

نشيك باستخدام اللوغاريتم لأنه في عندي لوغاريتم

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, -1$ → ⊛ $\log_1 2 \times 1$ X (1 لا يجوز) ⊛ $\log_{-1} 2 \times -1$ X (1- لا يجوز)

$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$ ⟹ نشيك على الحلول → $\log_5 2 \times 5$ ✓

$x^3 = 0 \Rightarrow x \neq 0$ → ⊛ $\log_0 0 \times 2$ X

$\log_x 2x = 0 \Rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$ → ⊛ $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \times 2 = \log_{\frac{1}{2}} 1$ ✓

لازم لأنه لوغاريتم $0 = 1$

Subject Date 22^{th}. Oct No.

⑥ $\ln x + \ln(x-1) = 1$

بجمعها الضرب

$\ln (x)(x-1) = 1$ نعطي e للطرفين

$e^{\ln(x)(x-1)} = e^1$

$(x)(x-1) = e$

$x^2 - x - e = 0$ معادلة تربيعية

رح احلها باستخدام القانون العام

$a = 1$
$b = -1$
$c = -e$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times -e}}{2 \times 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4e}}{2}$$

$\frac{1+\sqrt{1+4e}}{2}$ رح يطلع موجب ✓ حل مقبول

$\frac{1-\sqrt{1+4e}}{2} \rightarrow \sqrt{1+4e} > 1$ ✗

الجواب سالب ∴

لـ ما رح اخدها الحل لأنه بالسؤال

عندي $\ln x$ ولازم x تكون $x > 0$

Subject Date 28th. Oct No.

7) $\log_{2} 3x + \log_{4} 9x^2 = 4$

الأساسات مختلفة

خارج أقدر أرجع الجمع إلى ضرب

رح أستخدم خاصية $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$

رح أعتمد الأساس 2

$$= \log_2 3x + \frac{\log_2 9x^2}{\log_2 4} = 4$$

حل مباشرة

$$\log_2 3x + \frac{\log_2 9x^2}{2} = 4$$

$$\log_2 3x + \frac{1}{2}\log_2 9x^2 = 4$$

أرفعها (من خصائص اللوغاريتم)

$$\log_2 3x + \log_2 (9x^2)^{\frac{1}{2}} = 4$$

$$(9x^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9x^2} = 3x$$

$$\log_2 3x + \log_2 3x = 4$$

$$\log_2 (3x)(3x) = 4 \Rightarrow \log_2 9x^2 = 4$$

بصورة أسية $\Rightarrow 9x^2 = 2^4 \quad \div 9$

$$x^2 = \frac{2^4}{9} \quad \wedge \frac{1}{2}$$

$$x = \sqrt{\frac{2^4}{9}} \rightarrow x = \pm \frac{4}{3}$$

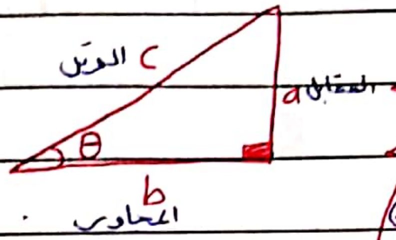
نعوض باللوغاريتم الموجود بالمسألة $\rightarrow \log_2 3x \rightarrow x = \frac{-4}{3} \rightarrow \log_2 -4$ ✗ تهمل

$\boxed{x = \frac{4}{3}}$ ✓ الحل

Subject   Date 31th. Oct No.

بسم الله الرحمن الرحيم

* Tregonometric functions : الاقترانات المثلثية



① $\sin\theta = \frac{a}{c}$ جا θ = المقابل / الوتر

② $\cos\theta = \frac{b}{c}$ جتا θ = المجاور / الوتر

③ $\tan\theta = \frac{a}{b} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ظا θ = المقابل / لجا

* نظرية فيثاغورس :

$c^2 = a^2 + b^2$

* مقلوبهم :

④ $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{c}{a}$ قتا θ = 1 / جا θ

⑤ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{c}{b}$ قا θ = 1 / جتا θ

⑥ $\cot\theta = \frac{b}{a} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ظتا θ = جتا θ / جا θ

* الزوايا المشهورة :

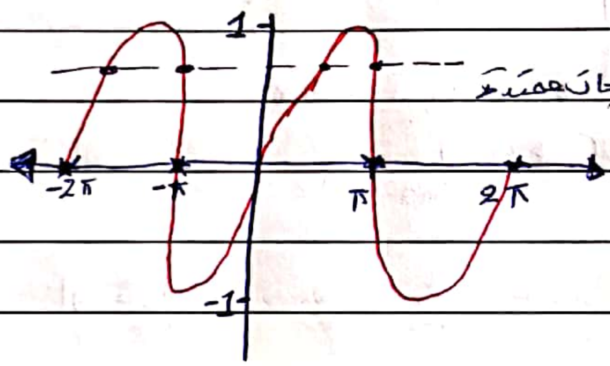
الزاوية بالدرجات .	degrees	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
الزاوية بالراد .	radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
جيب الزاوية	$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
جتا الزاوية	$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

Ex:

$$\tan\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1$$

$$\csc\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

* رسمة Sin x
على الفترة $[-2\pi, 2\pi]$



* الرسمة تكون على شكل موجات ممتدة إلى المالانهاية.

Domain = $\mathbb{R}$ لأنو حكينا إنه ممتد إلى المالانهاية

Range = $[-1, 1]$

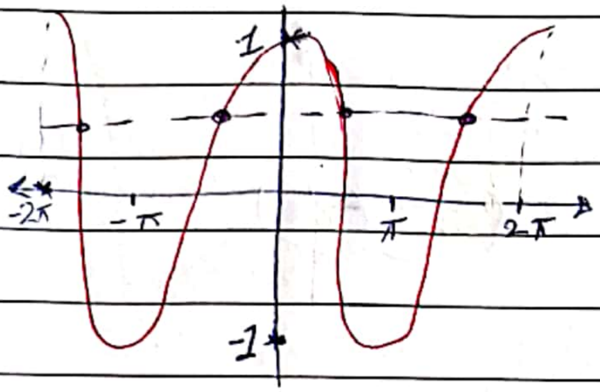
*. Sin not 1-1
لأنه يتقاطع بأكثر من نقطة
باستخدام ال Horizontal line test

* Sin → Odd function
لأنه بالرسم في Simitry على نقطة الأصل

$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$

Subject Date 3th - Oct No.

COS x رسمة



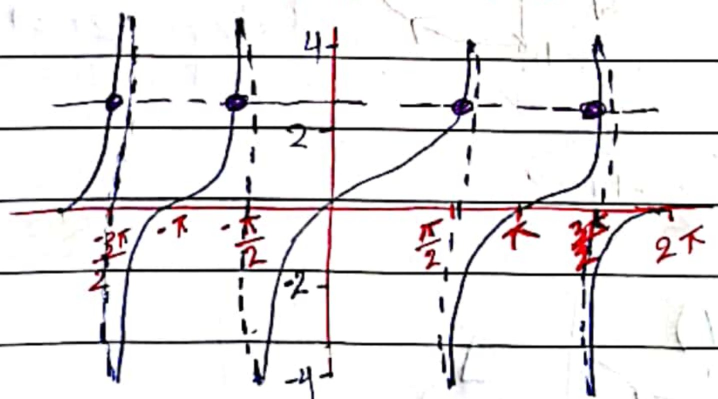
*رسمة ال COS موجات
وتمتد يمينًا إلى اللانهاية

Domain = R
Range = [-1, 1]

COS NOT 1-1 لأنه بيقطع بأكثر من نقطة
بسبب Horizental line test

COS → even
↳ Similtry about y-axis
$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$

tan x رسمة *



$\tan = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

Domain: لأنه كل النقاط ماعدا $\cos\theta$
$R - \{\cos\theta\}$

$= R - \{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}\}$

Domain tan = $R - \{\frac{\pi}{2} + n\pi\}$
$n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

tan not 1-1
(نفس السبب)

$\tan\theta$ = Odd
سيمتري حول نقطة الأصل → $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\text{odd}}{\text{even}} \Rightarrow$ odd

Range tan = R.

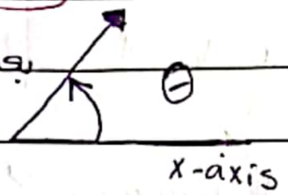
$\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$

Date 31th. Oct No.

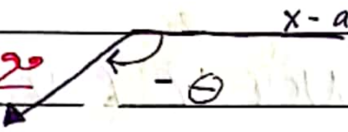
Tregonometric function:

شو المقصود بزاوية : $-\theta$ و θ ؟

بعكس اتجاه عقارب الساعة .
Counterclockwise
(positive angle)



θ & θ

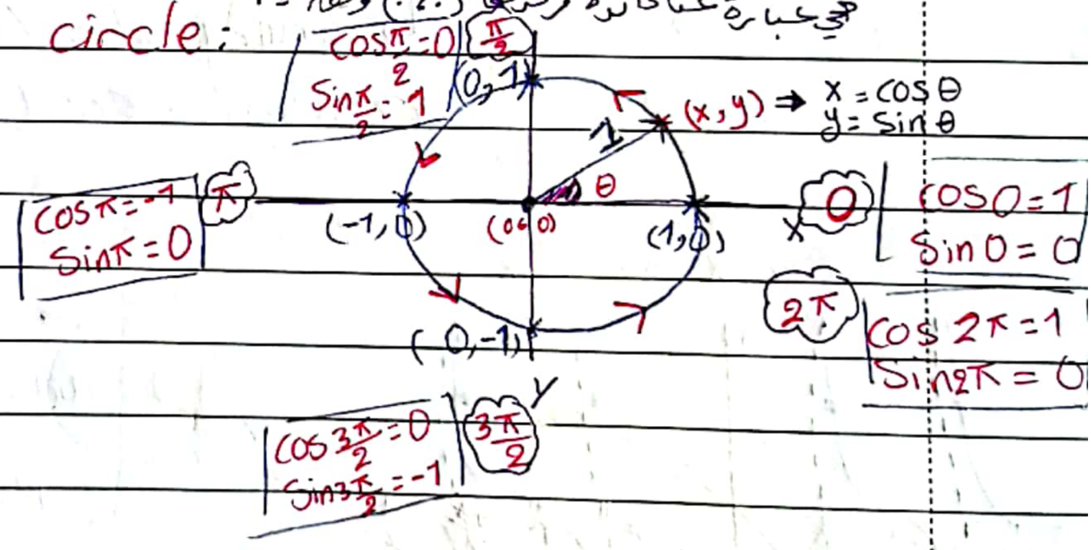


θ & θ -

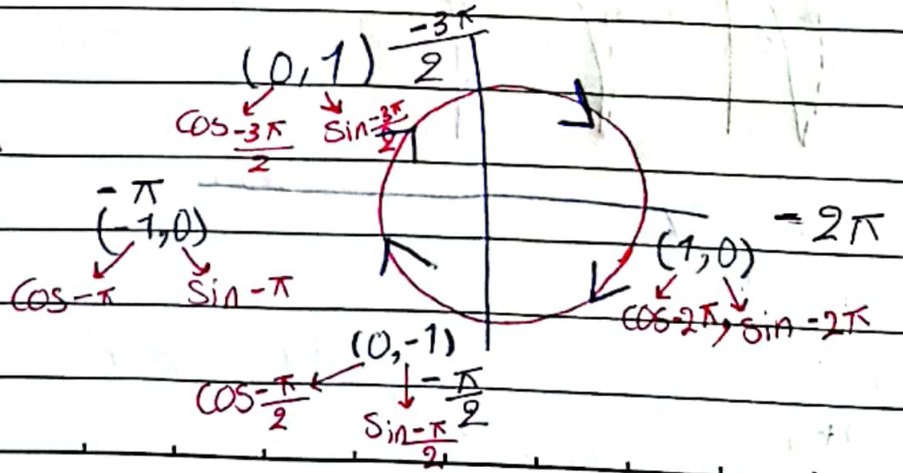
مع اتجاه عقارب الساعة .
clockwise
(negative angle)

⇒ Unit circle: هي عبارة عن دائرة مركزها (٠،٠) ونصفه = ١

لو مشينا بعكس عقارب الساعة ⇒

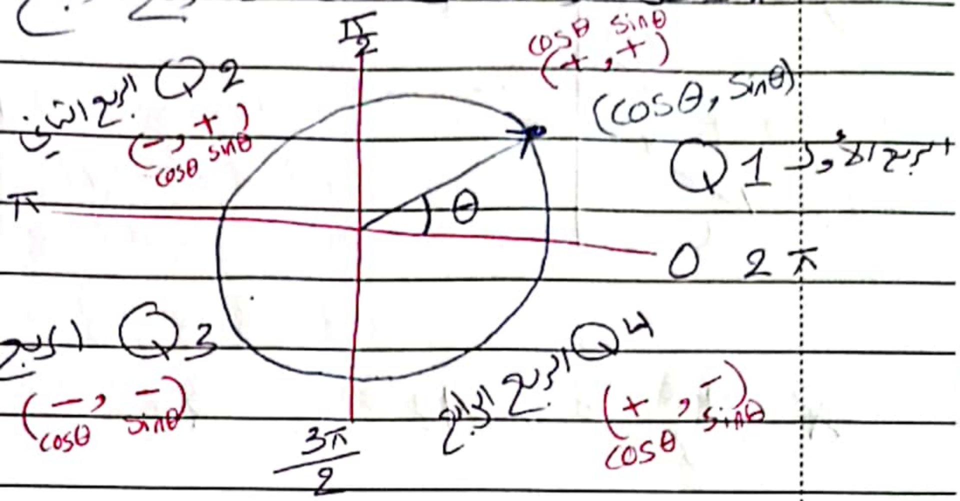


لو مشينا مع عقارب الساعة ⇒



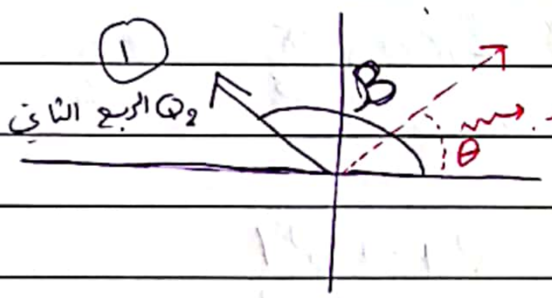
Subject — Date 31th. Oct No.

* دائرة الوحدة مقسمة على أربع أرباع :



* لما بدي أحسب الـ cos / sin للزاوية برجعها للزاوية المرجعية (الزاوية موجودة بالربع الأول) .

Ex



$Q_2 \rightarrow Q_1$

$\theta = \pi - \beta$

* find $\sin \frac{5\pi}{6}$, $\cos \frac{5\pi}{6}$?

$\frac{5\pi}{6} = \frac{5 * 180}{6} = 150° \longrightarrow$ موجودة بالربع الثاني

$\theta = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

الإشارة بنعرفها من الربع الموجودة فيه زاوية السؤال ←

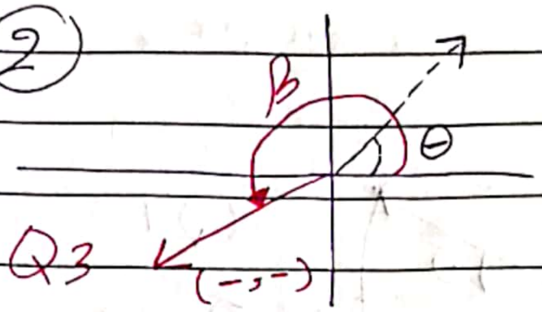
$\sin(\frac{5\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$

ربع ثاني
(− , +)
cos sin

$\cos(\frac{5\pi}{6}) = -\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

CRAFT NOTEBOOK

②



$Q_3 \longrightarrow Q_1$

$\theta = \beta - \pi$

$* \ \frac{4\pi}{3} = 240^\circ \in Q_3$

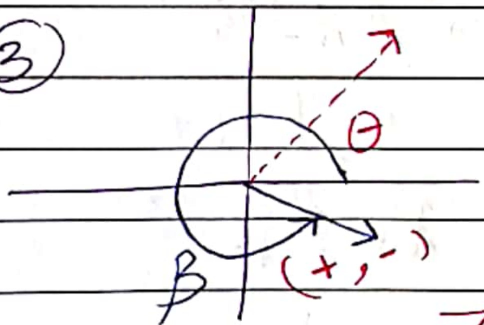
$\theta = \frac{4\pi}{3} - \pi = \text{''}$

$\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \ominus \sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

لأنه بالربع الثالث .

$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \ominus \cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

③



$Q_4 \rightarrow Q_1$

$\theta = 2\pi - \beta$

$* \ \frac{7\pi}{4} \in Q_4$

$\theta = 2\pi - \frac{7\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

$\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\left(7\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Subject Date 31^{th}. Oct No.

* Examples:

find domain ?

① $f(x) = \sin(\sqrt{x-5})$ الجذر التربيعي يجب ما داخله أن يكون أكبر أو يساوي صفر

$x - 5 \geq 0 \longrightarrow x \geq 5$ * $D_f = [5, \infty)$

② $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x-7}\right)$ استثناء أصفار المقام

$x - 7 = 0$

$x = 7$ $D_f = R - \{7\}$

find the Range ?

① $f(x) = \frac{3}{5+\cos x}$ $D_f = R$

$5+\cos x = 0$ ← أصفار المقام لأنه حتى لو بدي أخذ

$\cos x = -5$ ✗

ما عندي زاوية ال cos لها = ٥-

لأنه قيم ال cos فقط بين $[-1, 1]$

طريقة إيجاد ال Range ⟹ $-1 \leq \cos x \leq 1$ $\boxed{+5}$

① بحصره بال Range تبعه $4 \leq 5+\cos x \leq 6$ أقلب المتباينة

② بعمل عمليات حسابية حتى أوصل للاقتران الموجود بسؤال $\frac{1}{4} \geq \frac{1}{5+\cos x} \geq \frac{1}{6}$ $\boxed{\times 3}$

$\frac{3}{4} \geq \underbrace{\frac{3}{5+\cos x}}_{\text{استدعي الكل}} \geq \frac{3}{6}$ لما أقلب المتباينة بعكس اتجاهها

$= \frac{3}{4} \geq f(x) \geq \frac{1}{2}$

Range $f = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$

② $f(x) = 2\sin^2 x + 3$

$D_f = \mathbb{R}$

لأن هنا ما عندي أي مشكلة بالزاوية

$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \boxed{{}^\wedge 2}$

$0 \leq \sin^2 x \leq 1 \quad \boxed{* 2}$

$0 \leq 2\sin^2 x \leq 2 \quad \boxed{+3}$

$3 \leq 2\sin^2 x + 3 \leq 5$

Range: $[3, 5]$

* قاعدة: إذا كان $a \leq x \leq b$

$0 \leq x^2 \leq 1$

من الصفر إلى أكبر تربيع من a و b.

مثال $-3 \leq x \leq 2$

$0 \leq x \leq 9 \leftarrow {}^\wedge 2$

③ $f(x) = 3 + |\cos x|$

$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \boxed{\text{مطلق}}$

$0 \leq |\cos x| \leq 1 \quad \boxed{+3}$

$3 \leq 3 + |\cos x| \leq 4$

Range $= [3, 4]$

* المطلق نفس التربيع ⇐ يعني بصير محصور بين الصفر و مطلق أكبر عدد.

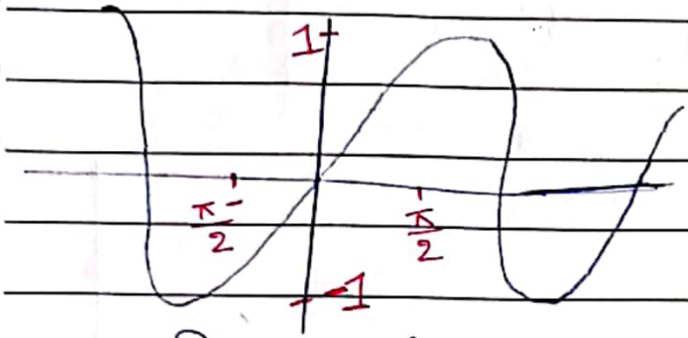
Subject   Date 2^{nd}. Nov   No.

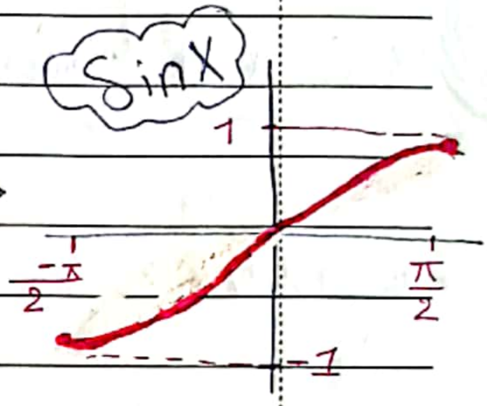
* Inverse Trigonometric Function:

$\sin x : \underset{\text{Domain}}{R} \longrightarrow \underset{\text{Range}}{[-1, 1]}$. Not 1-1

* عشان أحصل على inverse لازم يكون 1-1 *

الحل: إني أعمل Restricting للـ Domain يعني آخذ جزء منه





Domain → Range

$R \longrightarrow [-1, 1]$

$\boxed{\text{Not } 1-1}$

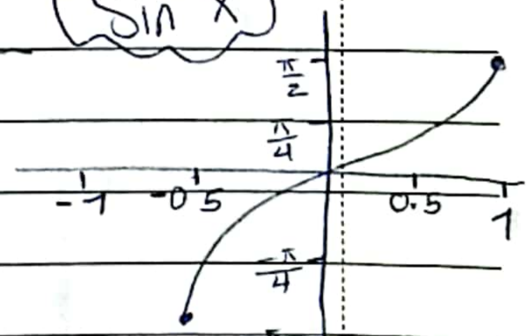
Domain → Range

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$

$\boxed{1-1}$

هون رح أقدر أحسبله الـ inverse

صار عندي :



Domain sinx → Range $\sin^{-1}x$

و

Range sinx → Domain $\sin^{-1}x$

Domain → Range

$[-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\boxed{1-1}$

Odd $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$

Ex:

$\sin^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$ ؟ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ يعني شو الزاوية إلي جيبها ½ بتقوس

$\sin^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4}$ ؟ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ يعني شو الزاوية إلي جيبها $\frac{1}{\sqrt{2}}$ تقوس

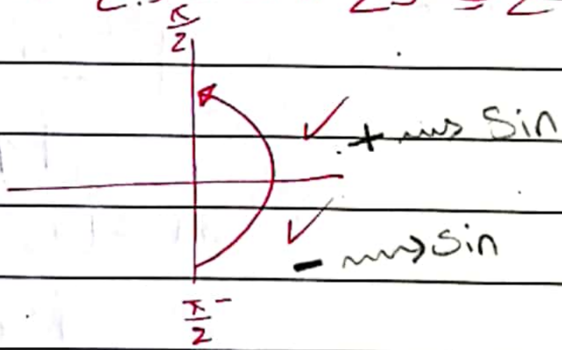
$\sin^{-1}(\underbrace{-\frac{1}{2}}) = -\sin^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$

$\downarrow$

Sin → odd

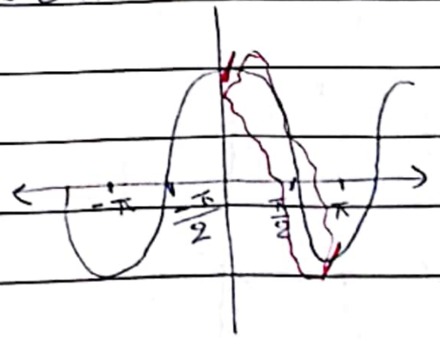
∴ بقدر أطلع الإشارة السالبة برا

لازم تكون الزوايا تقع في الربع الأول أو الرابع لأنه الفترة $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

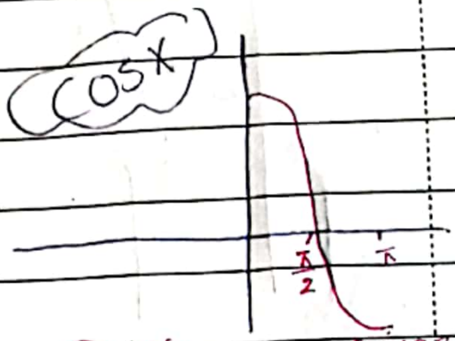


Subject Date 2^{nd}. Nov

$\cos x : \underset{\text{Domain}}{\mathbb{R}} \to \underset{\text{Range}}{[-1,1]}$ Not 1-1



Restricting

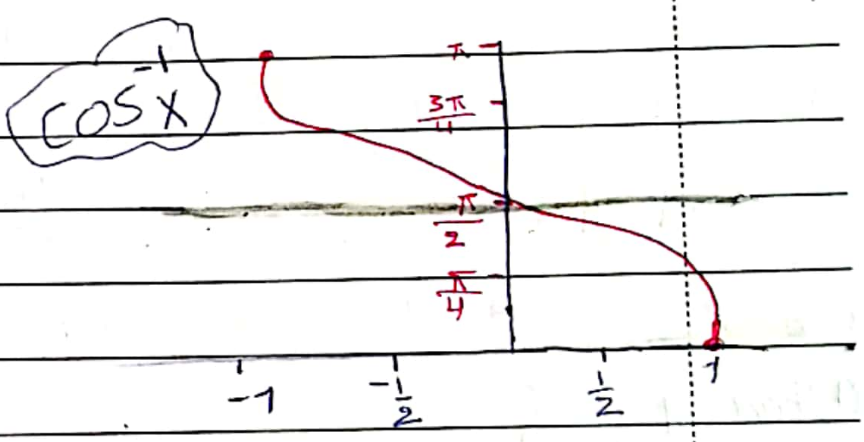


Domain → Range

$[0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$

. 1-1

inverse ⇓



$\cos^{-1}x : \underset{\text{Domain}}{[-1,1]} \to \underset{\text{Range}}{[0,\pi]}$

Ex:

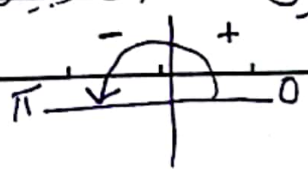
$\cos^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$ يعني الزاوية إلي جتا = ½ ونقول بين $[0,\pi]$ ؟ 1-1 $\boxed{\text{not even, not odd}}$

$\cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$

$\cos^{-1}(-\frac{1}{2}) = \pi - \cos^{-1}(\frac{1}{2})$ القاعدة: ↳ $\cos^{-1}(-x)$?

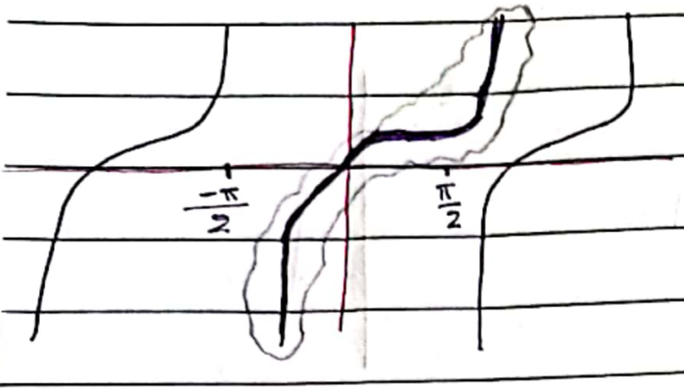
$\cancel{-\cos^{-1}(\frac{1}{2})}\ \cancel{\cos^{-1}(\frac{1}{2})} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}(x)$

*كل الإجابات بين الـ $[0,\pi]$ (بين الربع الأول والثاني)

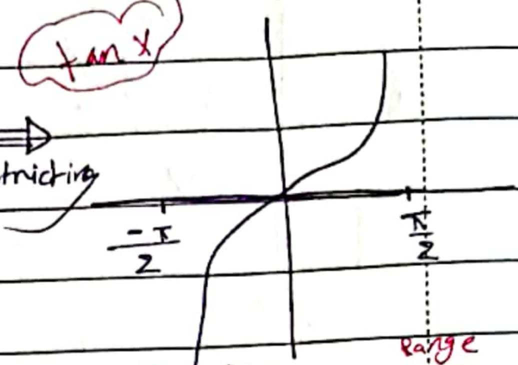


CRAFT NOTEBOOK

$\tan x : \underbrace{\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + n\pi,\ n: 0, \pm 1, \pm 2 \dots\}}_{\text{Domain}} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{Range}}$



Restricting $\Longrightarrow$

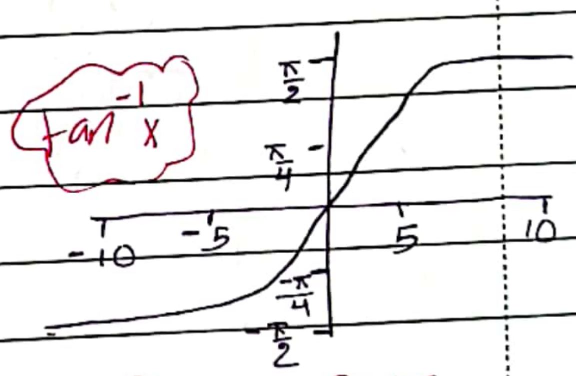


Not 1-1

Domain $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow$ Range $\mathbb{R}$

1-1

inverse



Ex

① $\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

② $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

③ $\tan^{-1}(-1) = -\tan^{-1}(1) = -\frac{\pi}{4}$

$* \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) *$

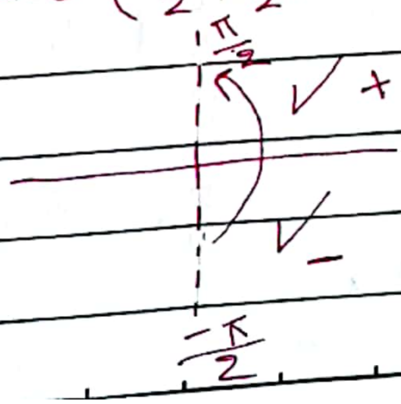
Domain Range

$\mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

1-1

odd

$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}(x)$



Subject   Date 2nd. Nov No.

Inverse Trigonometric Functions.

Ex: Find the domain $f(x) = \sin^{-1}(2x+1)$

Domain $\sin^{-1}(x)$: $[-1,1]$

عشان طلب ال Domain فبلش من الاقتران اللي بالسؤال وبخليه يضل X لحالها

$$-1 \leq 2x+1 \leq 1 \quad -1$$

$$-2 \leq 2x \leq 0 \quad \div 2$$

$$-1 \leq x \leq 0$$

$\therefore$ Domain $= [-1, 0]$

Find Range $f(x) = \pi + |\tan^{-1} x|$

* Range $\tan^{-1}(x)$: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

عشان طلب ال Range فبلش من $\tan^{-1} x$ وبخليه يصير زي السؤال

$$-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq |\tan^{-1} x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\pi \leq \pi + |\tan^{-1} x| < \frac{\pi}{2} + \pi$$

حطيت المساواة لأنهم بنتموا للفترة.

Range $= \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

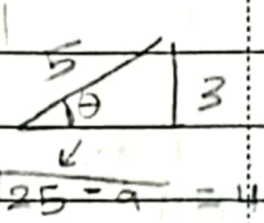
* Find the value of the following:

① $\sec(\sin^{-1}(\frac{3}{5})) \Rightarrow \sin^{-1}(\frac{3}{5}) = \theta$ نعوض sin للطرفين

الداخل تساوي θ

$\frac{3}{5} = \sin\theta$

$\Rightarrow \sec\theta = \frac{5}{4}$



② $\sin[2\sin^{-1}(\frac{1}{4})] \Rightarrow \sin^{-1}\frac{1}{4} = \theta$

$\sin\theta = \frac{1}{4}$

$= \sin[2\theta]$

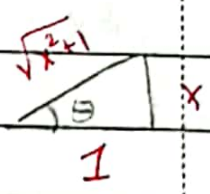
$= 2\sin\theta\cos\theta$ جا٢س = ٢جاس جتاس

$= 2(\frac{1}{4}) \times (\frac{\sqrt{15}}{4}) = \frac{2\sqrt{15}}{16}$

③ $\cos(\tan^{-1}(x)) \Rightarrow \tan^{-1}(x) = \theta$

$\tan\theta = \boxed{x} \Rightarrow \frac{x}{1}$

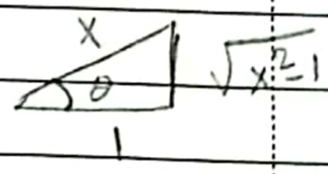
$= \cos(\theta) = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$



④ $\sin(\sec^{-1}(x)) \Rightarrow \sec^{-1}(x) = \theta$

$\sec(\theta) = x$

الوتر / المجاور



$\sin\theta = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

Subject Date 2^{nd} NOV No.

Thm: $f \circ f^{-1}(x) = x$ and $f^{-1} \circ f(x) = x$

$f(x) = \sin x$ $f^{-1}(x) = \sin x^{-1}$

$\sin(\sin^{-1} x) = x, \quad \forall x \in D_{\sin^{-1}} \rightsquigarrow [-1,1]$

$\sin^{-1}(\sin x) = x, \quad \forall x \in D_{\sin} \rightsquigarrow [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Ex: $\sin(\sin^{-1}\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$ لانه $\rightsquigarrow \frac{1}{3} \in [-1,1]$

$\sin^{-1}(\sin\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} \rightsquigarrow \frac{\pi}{4} \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\sin^{-1}(\sin\frac{2\pi}{3}) \longrightarrow \frac{2\pi}{3} \notin [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

الحل $\Rightarrow$ $\frac{2\pi}{3} \in Q_2 \rightarrow Q_1$ $\theta = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

$\sin^{-1}(\sin\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$ ما في تغيير على الإشارة

$\frac{\pi}{3} \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. لأنه sin (+) بالربع الاول والثاني

$\sin^{-1}(\sin\frac{4\pi}{3}) \rightsquigarrow \frac{4\pi}{3} \notin [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\frac{4\pi}{3} \in Q_3 \rightarrow Q_1$ $\theta = \frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}$

$\sin^{-1}(-\sin\frac{\pi}{3}) = -\sin^{-1}(\sin\frac{\pi}{3}) = \frac{-\pi}{3} \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

لأنه بالربع الثالث

إشارة sin (-)

Subject   Date 2^{nd} NOV   No.

$f(x) = \cos x$, $f^{-1}(x) = \cos^{-1}(x)$

$\cos(\cos^{-1}(x)) = x \quad x \in [-1, 1]$

$\cos^{-1}(\cos(x)) = x \quad x \in [0, \pi]$

Ex: * $\cos^{-1}(\cos \frac{2\pi}{3}) = \frac{2\pi}{3} \qquad \frac{2\pi}{3} \in [0, \pi]$

* $\cos^{-1}(\cos \frac{7\pi}{4}) \rightarrow \frac{7\pi}{4} \in Q_4 \longrightarrow Q_1$

$\cos^{-1}(\cos \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} \qquad \theta = 2\pi - \frac{7\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4} \in [0, \pi]$

* $\cos^{-1}(\cos \frac{4\pi}{3}) \qquad \frac{4\pi}{3} \in Q_3 \longrightarrow Q_1$

$\theta = \frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}$

$\cos^{-1}(-\cos \frac{\pi}{3}) \longrightarrow \cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$

لأنه إشارة ال cos بالربع ٣ سالبة .

$= \pi - \cos^{-1}(\cos \frac{\pi}{3})$ Not even Not odd

$= \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \in [0, \pi]$

CRAFT NOTEBOOK

Subject Date 2^{nd} . Nov No.

$f(x) = \tan x$, $f^{-1}(x) = \tan^{-1}(x)$

$\tan(\tan^{-1}x) = x \quad \forall x \in R$

$\tan^{-1}(\tan x) = x \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Ex: (1) $\tan^{-1}(\tan \frac{\pi}{5}) = \frac{\pi}{5} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

(2) $\tan^{-1}(\tan \frac{2\pi}{3}) \rightarrow \frac{2\pi}{3} \in Q2 \Rightarrow Q1$

$\theta = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

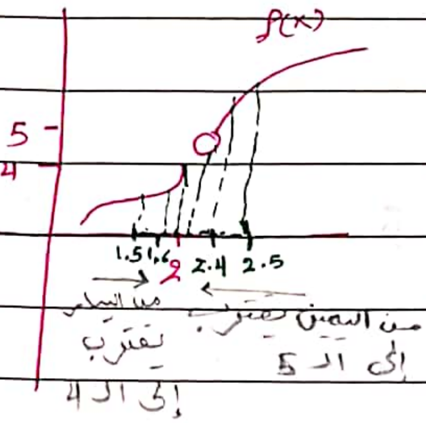
$= \tan^{-1}(-\tan \frac{\pi}{3}) = -\tan^{-1}(\tan \frac{\pi}{3})$

إشارة tan بالربع الثاني (-)

$= -\frac{\pi}{3} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Subject   Date 9th . Nov No.

* The limit of function : النهايات



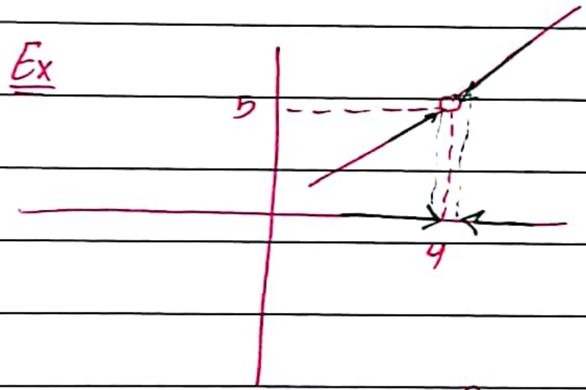
$\lim_{x \to 2} f(x)$ → $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 5$, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4$ $\}\neq$

$\therefore \lim_{x \to 2} f(x)$ d.n.e

does not exist

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \overset{\text{if \& only if}}{\Longleftrightarrow} \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

Ex



$\lim_{x \to 4} f(x)$ → $\lim_{x \to 4^+} f(x) = 5$, $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 5$ $\} =$ ⇝ $\lim_{x \to 4} f(x) = 5.$

Subject Date 9^{th}. Nov No.

calculating limits :

① $\lim_{x \to a} c = c$ ⟶ $a, c \in \mathbb{R}$

ex: $\lim_{x \to 7} 10 = 10$, $f(x) = 10$

② $\lim_{x \to a} x = a$

ex: $\lim_{x \to 9} x = 9$, $f(x) = 9$

③ $\lim_{x \to a} x^n = a^n$

ex: $\lim_{x \to 4} x^2 = 4^2 = 16$, n positive ⊕

موجودة

Thm $\lim_{x \to a} f(x) = \boxed{L}$, $\lim_{x \to a} g(x) = \boxed{M}$, $a, k \in \mathbb{R}$

① $\lim_{x \to a} (f \pm g) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L \pm M$

② $\lim_{x \to a} (fg) = \lim_{x \to a} f \lim_{x \to a} g = LM$

النهايات توزع بالجمع والطرح والضرب والقسمة.

③ $\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{L}{M}$, $M \neq 0$

④ $\lim\limits_{x \to a} k\, f(x) = \lim\limits_{x \to a} k \;\lim\limits_{x \to a} f(x) = k\,L$

⑤ $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$ (n even $L > 0$)

ex: ① $\lim\limits_{x \to 2} x^2 + 5x - 1 = 2^2 + 5(2) - 1 = 4 + 10 - 1 = 13$

⊛ $\lim\limits_{x \to a} p(x) = p(a)$ $p(x)$: poly

② $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1}, & x \geq 1 \\ \dfrac{5x^3 + 4}{x - 3}, & x < 1 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{9 - 1} = \sqrt{8}$

حسب القاعدة الأولى

b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

لوجود تشعب

إشارة الأكبر (يمين) $\lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x^2 - 1} = 0$

هون ما عندي مشكلة بالجذر لأنه المطلوب جهة اليمين.

إشارة الأصغر (يسار) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{5x^3 + 4}{x - 3} = \dfrac{5(1) + 4}{1 - 3} = \dfrac{9}{-2}$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x)$ d.n.e

Subject   Date 9th, NOV No.

Ex $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$, $\lim_{x \to 2} g(x) = 4$

Find $\longrightarrow$ ① $\lim_{x \to 2} f(x) + 5g(x) = \lim_{x \to 2} f(x) + 5 \lim_{x \to 2} g(x)$

$= 3 + 5(4) = 23$

② $\lim_{x \to 2} f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to 2} f(x) + \lim_{x \to 2} \frac{g(x)}{f(x)}$

$= \cancel{3 + \frac{4}{3}} = \frac{9+4}{3} = \frac{13}{3}$

Ex find K such that

$\lim_{x \to 1} f(x)$ exist → يعني النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \geq 1 \to (+) \\ 2kx+5, & x \leq 1 \to (-) \end{cases}$$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$

* الحل تعويض مباشر لأنه القاعدة كثيرات حدود

$\lim_{x \to 1^+} x^2+1 = \lim_{x \to 1^-} 2kx+5$

$2 = 2k+5 \longrightarrow 2-5 = 2k \quad k = -\frac{3}{2}$ ##

CRAFT NOTEBOOK

Subject Date 9^{th} NOV No.

* calculating limits $\left(\frac{0}{0}\right)$

قيمة غير محددة

① $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} = \frac{2^2 - 4}{2^2 + 2 - 6} = \frac{0}{0}$ ⚠ !! حلل

$\lim \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x+3)} = \lim \frac{x+2}{x+3} = \frac{4}{5}$ ✓

هادا هو جواب النهاية.

② $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3} = \frac{0}{0}$!! الضرب بالمرافق التربيعي

$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3} * \frac{(\sqrt{x+1} + 2)}{(\sqrt{x+1} + 2)}$

$= \lim_{x \to 3} \frac{x + 1 - 4}{x - 3\,(\sqrt{x+1} + 2)} = \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}(\sqrt{x+1} + 2)}$

$= \lim_{x \to 3} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} = \frac{1}{4}$

③ $\lim_{x \to 2} \frac{\frac{3}{x} - \frac{3}{2}}{x - 2} = \frac{0}{0}$!! توحيد مقامات

$\lim_{x \to 2} \frac{\frac{6 - 3x}{2x}}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{3(\cancel{2-x})^{(-1)}}{2x}}{\cancel{x-2}} = \lim_{x \to 2} \frac{-3}{2x} = \frac{-3}{4}$ ✓

Subject   Date 9th Nov   No.

(4) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$

بسبب وجود القيمة المطلقة رح نتاخد يمين يسار .

لـ بدنا إعادة تعريفها $|x-2|$

$$\underset{(2-x)}{- - - -} \quad 2 \quad \underset{(x-2)}{+ + +}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x-2}, & x \geq 2 \\ \frac{2-x}{x-2}, & x < 2 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \geq 2 \\ -1, & x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} -1 = -1$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{|x-2|}{x-2} \quad d.n.e.$$

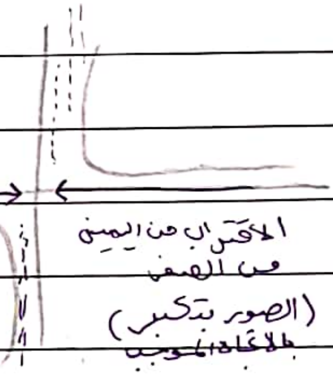
Subject Date 9th NOV No.

Infinite limits : $\frac{c}{0}$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$

$+\infty$ $-\infty$ $-\infty$ / $+\infty$

① $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ رسمته

$= \frac{1}{0}$ $\xrightarrow{+}$ $+\infty$; $\xrightarrow{-}$ $-\infty$



الاقتراب من اليسار من الصفر
(الصور بتكبر بالاتجاه السالب)

الاقتراب من اليمين من الصفر
(الصور بتكبر بالاتجاه الموجب)

* لو ما بدي رسمته ؟؟.

* نختبر الإشارة عند الصفر للاقتران

$- - - \mid + + +$

عدد أقل 0 عدد أكبر

② $\lim\limits_{x \to 7} \frac{1}{(x-7)^2} = \frac{1}{0} = +\infty$

$+ + + + + + +$

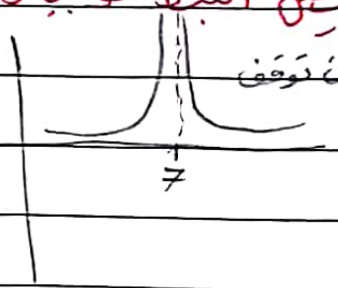
7

← نختبر الإشارة عند صفر الاقتران.

∵ بما أن المقام موجب (تربيعي) ← يعني القيم على خط الأعداد كلها موجبة

بالتالي بالتعويض البسط موجب والمقام موجب ← (+)

رسمتها ←



الصور بتكبر دون توقف بالاتجاه الموجب

Subject Date 9th Nov No.

③ $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{-1}{(x-5)^2} = \dfrac{-1}{0} = -\infty$

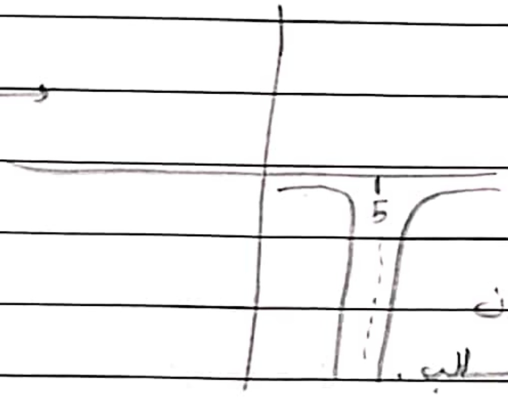
$\overleftrightarrow{\;- - - - \overset{}{\underset{5}{|}} - - - -\;}$

لأن البسط سالب

والمقام موجب فدائماً رح تكون

القيم سالبة

رسمتها



بتكبر الإجابات تكون

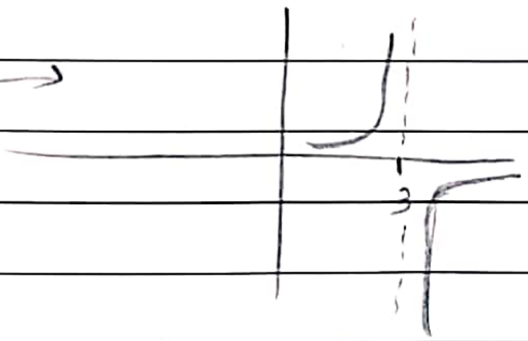
توقف حالي باتجاه السالب.

④ $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{-1}{x-3} = \dfrac{-1}{0}$ $\begin{cases} \to -\infty \\ \to +\infty \end{cases}$

رسمتها

$\overleftrightarrow{+ + + \quad \underset{3}{|} \quad - - -}$

عدد أصغر   3   عدد أكبر



ex: $f(x) = \dfrac{2-x}{(x-4)(x+2)}$ Find?

* $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ * $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ * $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

الحل:

Subject   Date 9th Nov No.

① $\lim_{x \to 2} f(x) = 0$ ✓   بالتعويض المباشر.

② $\lim_{x \to 4} f(x) = \frac{2-4}{0} = \frac{-2}{0}$ نختبر إشارة [illegible] الاقتران كامل

$x \to 4^+$: $-\infty$ | $x \to 4^-$: $+\infty$

لأنه عندي x بالبسط و x بالمقام.

البسط

	$+++$	2	$---$

المقام

	$+++$	-2	$---$	4	$+++$

$f(x)$

	$+++$	-2	$---$	2	$++$	4	$---$

③ $\lim_{x \to -2} f(x) = \frac{4}{0}$ $\to +, -\infty$; $\to \infty$

نفس خطوات الفرع ②

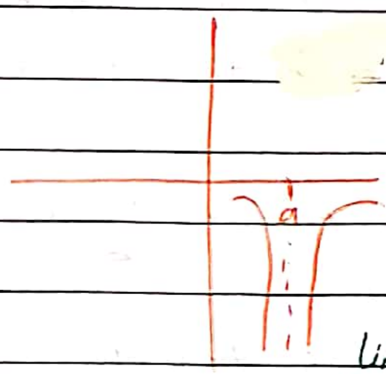
Subject Date 11^{th}. Nov No.

* Vertical asymptotes :

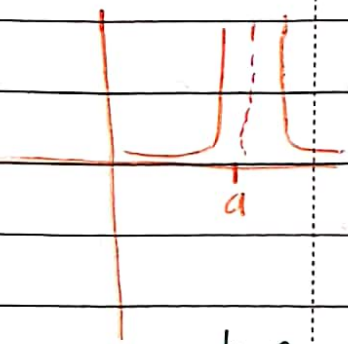
$x = a$ V. asy $\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

أو

$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

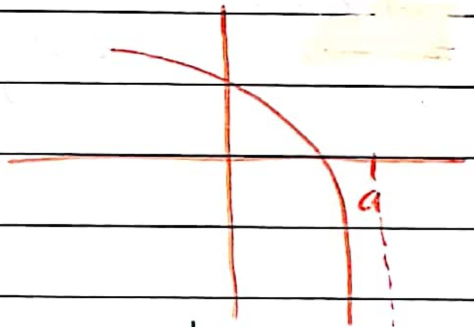


أو

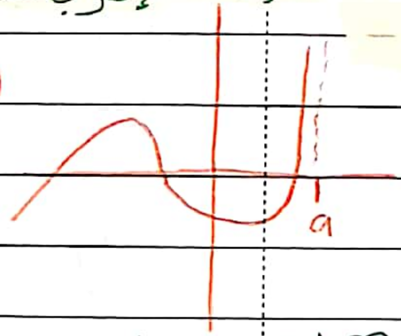


$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

* إذا كان الاقتراب من اليسار فقط :

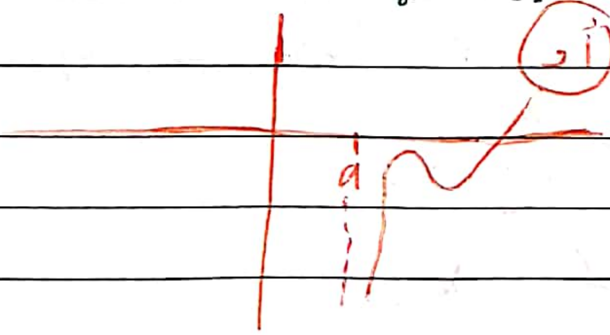


أو

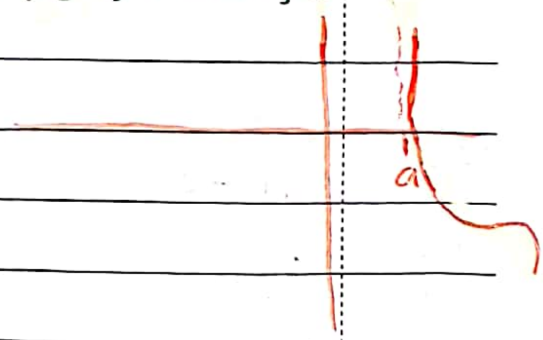


$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

* إذا كان الاقتراب من اليمين فقط :



أو



$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

* أي حالة من الحالات السابقة يكون للاقتران خط اقتراب عمودي V.asy ← جوابه دائماً $\pm\infty$

CRAFT NOTEBOOK

Subject Date 11th. NOV No.

*ex Find the vertical asymptotes ?

① $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$

لما V.asy يعني لازم الجواب

$\dfrac{(\text{عدد})}{0}$ يعني تكون $(+\infty , -\infty)$

*نحصل عليه عن طريق أصفار المقام.

$x^2-2x=0 \rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow x=0 , x=2$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2-4}{x^2-2x} = \dfrac{-4}{0} = \infty$ بدون إشارة بس الـ ∞ من خط الأعداد بس كافي لأنه ما بيلزم السؤال

$x=0$ is V. asy

$\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-2x} = \dfrac{0}{0}$ $\dfrac{0}{0}$ نحلل $\Rightarrow \dfrac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} = \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

$\neq \infty$ Not V. asy

الي بتطلع منهم ∞ بدون النظر عن إشارتها

فهي V. asy

OR $f(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} = \dfrac{x+2}{x}$ نبسط الإقتران

نساوي المقام بالصفر

$x=0 \Rightarrow \therefore$ V. asy

② $f(x) = \dfrac{x-2}{|x|-2}$ $|x|=0 \rightarrow x=0$

$\xleftarrow{\;-\;} 0 \xrightarrow{\;+\;}$

$-x$ 0 x

بعد إعادة التعريف

$f(x) \begin{cases} \dfrac{x-2}{x-2} = 1 , & x \geq 0 \\ \dfrac{x-2}{-x-2} , & x < 0 \end{cases}$

فاعتبري هذا الشكل بس مباشرة اختصرت.

$-x-2 \rightarrow -x-2=0 \rightarrow x=-2$ V. asy

Sol2 $|x|-2=0 \Rightarrow x=\pm 2$ $\lim_{x\to 2} f(x)$, $\lim_{x\to -2} f(x)$ ← نجد لهم

CRAFT NOTEBOOK

Scanned with CamScanner

Subject   Date 11th . NOV No.

*هل جميع الاقترانات لها V.asy ؟ لا

① $f(x) = x^2 + 5x + 7$ (No V.asy) $\boxed{0}$ (كثير حدود) ← توضيح ال

② $f(x) = \frac{1}{x-7}$, $x = 7$ V.asy $\boxed{1}$

③ $f(x) = \frac{1}{(x-7)(x-2)}$, $x=7$ / $x=2$ V.asy $\boxed{2}$

مبسط لأبسط صورة ←

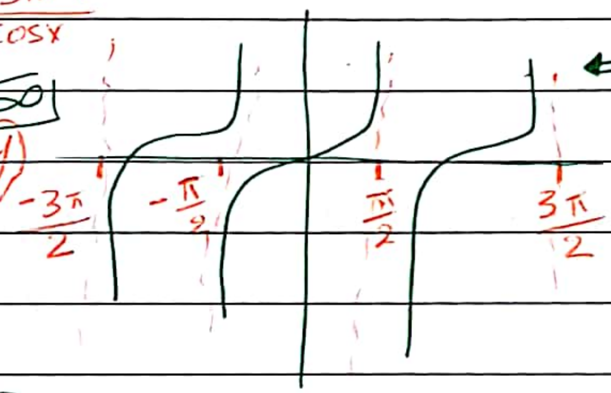
④ $f(x) = \frac{5}{(x-3)(x)(x+4)}$, $x=3$ / $x=0$ / $x=-4$ V.asy $\boxed{3}$

مبسط لأبسط صورة ←

⑤ $f(x) = \tan x \rightarrow \frac{\sin x}{\cos x}$ $\boxed{\infty}$ V.asy

$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$

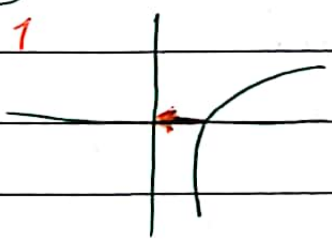
أصفار المقام



يمكن أن تصل ∞ ← عدد ال V.asy

*ممكن الاقتران ما يكون إله مقام بس في إله V.asy ←

⑥ (*) $f(x) = \log_b x$, $b > 1$



$\lim_{x \to 0^+} \log_b x = -\infty$

$x=0$ V.asy

(*) $f(x) = \ln x$

$x=0$ V.asy $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

Subject Date 11th - NOV No.

Continuity : الإتصال

تعريف الإتصال على نقطة

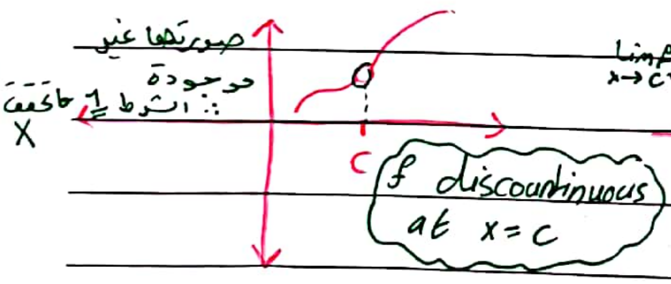
Definetion : A function is said to be continuous at $x=c$ provided the following conditions are satisfied :

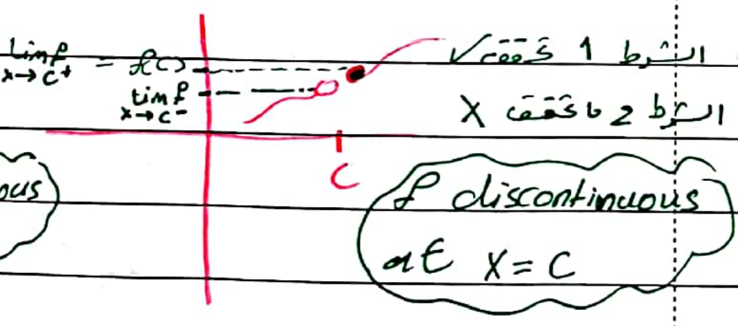
1. $f(c)$ is defined $\Rightarrow (c \in D_f)$
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ exist $\Rightarrow (\lim_{x \to c^+} f = \lim_{x \to c^-} f)$
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

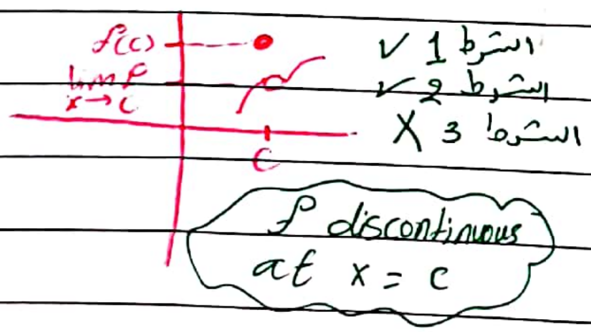
* إذا الشرط الثالث تحقق فأكيد الشرط 1 و 2 رح يكونوا تحققوا
* إذا الشرط الاول ما تحقق ما بنعمل حل ./ * إذا الشرط الثاني ما تحقق ما بنكمل

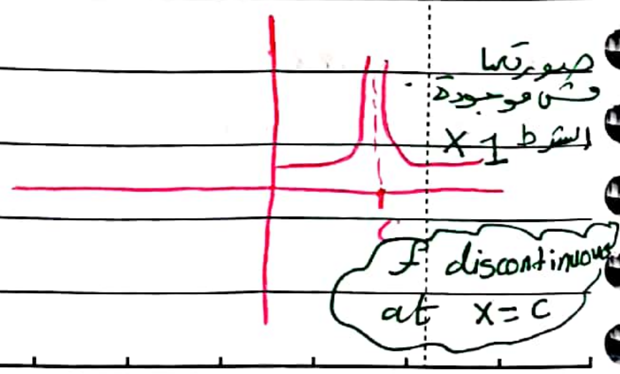
Remark : f is not continuous at $x=c$,

عدم اتصال f discontinuous at $x=c$

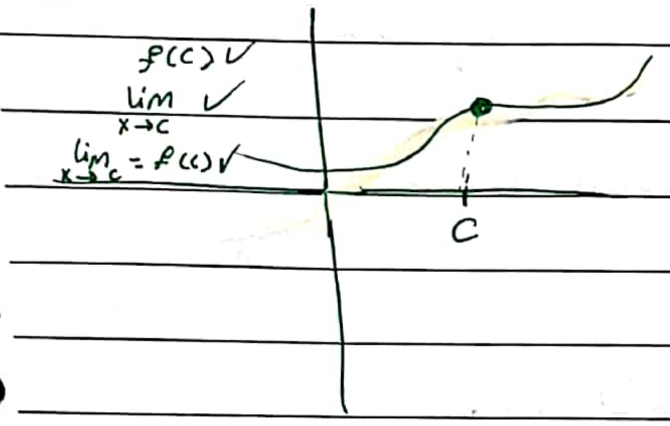








* متى يكون الاقتران متصل ← عندما تتحقق جميع الشروط:



$\boxed{\text{cts at } x = c}$

Note: If $f(x)$ cts on $R = (-\infty, +\infty)$
$f(x)$ continuous everywhere.

* **Theorem**: If the functions f & g are cts at $x = c$ ← الاتصال يحافظ على الجمع والطرح والضرب والقسمة.

ⓐ $f \pm g$ is cts at $x = c$

ⓑ $f * g$ is cts at $x = c$

ⓒ $\frac{f}{g}$ is cts at $x = c$; $g(c) \neq 0$

* **Theorem**: the following types of functions are cts at every number in their domains. →

⇒ polynomials :→ $x^2 + 5x + 7$, x^3, ---- (everywhere)

⇒ rationals : → $\frac{1}{x}$ → $(R - \{0\})$ ما عدا أصفار المقام

⇒ root functions :→ $\sqrt{x}$ → (cts $[0, \infty)$), $\sqrt[3]{x}$ (cts (everywhere))

⇒ trigonometric :→ $\sin x$ / $\cos x$ (cts everywhere)

$\tan x$ $R - \{\frac{\pi}{2} + n\pi\}$ ما عدا أصفار المقام

⇒ Inverse trigonometric :→ $\tan^{-1} x$ (cts everywhere)

$\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ $[-1, 1]$

$\Rightarrow$ exponential : b^x, e^x (cts everywhere) Domain R

$\Rightarrow$ logarethmic : $\ln x$, $\log_b x$ $(0, \infty)$ متصل على مجاله

ex where is the function $f(x) = \dfrac{\ln x + \tan^{-1} x}{x^2 - 1}$ cts ?

① $f(x) = \dfrac{\ln x + \tan^{-1} x}{x^2 - 1}$ خذ Domain الاقتران

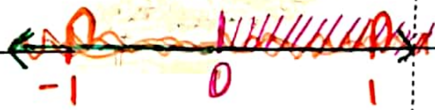
بالتالي يكون متصل على مجاله.

البسط // $\ln x \longrightarrow (0, \infty)$

$\tan^{-1} x \longrightarrow R \longrightarrow \cap (0, \infty)$

المقام $x^2 - 1 \longrightarrow R - \{\text{الاصفار}\} = R - \left\{ \begin{matrix} x^2 - 1 = 0 \\ x = \pm 1 \end{matrix} \right\} = R - \{1, -1\}$

$(0, \infty) \cap R - \{1, -1\}$



$= (0, 1) \cup (1, \infty)$

$\boxed{f(x) \text{ Cts } (0, 1) \cup (1, \infty)}$

② $f(x) = \sin^{-1}(1 + 2x)$ Df ??

$-1 \le 1 + 2x \le 1$
$-1 \quad\quad -1 \quad\quad -1$

$-2 \le 2x \le 0 \quad \div 2 \quad \Rightarrow -1 \le x \le 0$

$D_f = [-1, 0] \to f(x)$ cts $[-1, 0]$

Subject Date 11^{th} NOV No.

(3) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

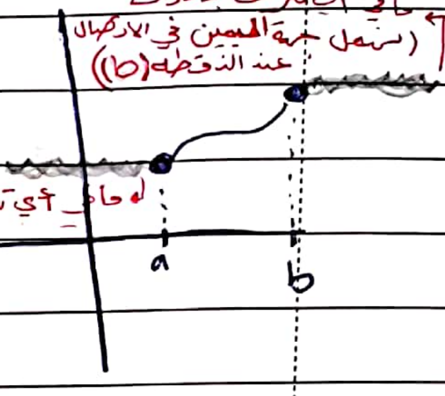
أصفار المقام: $1+e^{\frac{1}{x}} = 0 \longrightarrow -1 = e^{\frac{1}{x}}$ X

أصفار المقام بالأس. $\frac{1}{\underline{\underline{x}}} \Rightarrow x = 0$ $D_f = R - \{0\}$

$f(x)$ CTS $R - \{0\}$

* Continuity on an Interval : الاتصال على فترة

ما في أي تعريف للاقترانات (نهمل جهة اليمين في الاتصال عند النقطة (b))



* f cts $[a,b]$ if:

① f cts (a,b)

② $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

لو ما في أي تعريف للاقتران (نهمل جهة اليسار في الاتصال عند النقطة (a))

[f cts from right at $x=a$]

③ $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

[f cts from left at $x=b$]

Ex: $f(x) = \begin{cases} x^2-1 , & 0 \le x < 1 \\ 5 , & x=1 \end{cases}$

Is $f(x)$ cts on the closed Interval $[0,1]$?

* نفحص الشروط :

* Is $f(x)$ cts on $(0,1)$?

$\boxed{x^2-1} \to$ (cts everywhere) كثير حدود ✓

* Is $f(x)$ cts at $x=0$ (right) ?

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \overset{?}{=} f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^2-1 \overset{?}{=} 0-1 \Rightarrow -1 = -1$ ✓

$\boxed{f(x) \text{ cts at } [0,1)}$

* Is $f(x)$ cts at $x=1$ (left) ?

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \overset{?}{=} f(1)$

$\lim\limits_{x\to 1^-} x^2-1 \overset{?}{=} 5 \Rightarrow 0 \ne 5$ ✗

Subject Date 14^{th} Nov No.

* continuity of composition :

⇒ Theorem : If (f) cts everywhere , (g) cts everywhere
Then fog , gof cts every where.

* $f(x) = \sin x$ (cts everywhere) , $g(x) = |x|$ (cts everywhr) ⇒ تركيبهم ⇒ $\sin|x|$, $|\sin x|$ ⇒ cts everywhere

* $\tan^{-1}(e^x)$ ⇒ $\tan^{-1}x$ cts everywhere, e^x cts everywhere ⇒ $\tan^{-1}(e^x)$ (cts everywhere)

⇒ Theorem : If g cts x=c and f(x) cts g(c) Then fog cts at x=c

* $f(g(x))$ ⇒ fog cts $\boxed{c}$ ⇒ ① g cts at x=c ② f cts at g(c)

ex: $f(x) = \dfrac{1}{x-\frac{1}{2}}$, $g(x) = \dfrac{1}{2x}$

① f is cts $R-\{\frac{1}{2}\}$
② g is cts $R-\{0\}$

Q1 Is fog cts at x=0 ? * Is g cts at x=0 ? No
fog discts at x=0 ← ما بكمل حل مباشرة بكتبله

Q2 Is fog cts at x=1 ? * Is g cts at x=1 ? yes
fog discts at x=1 ⇐ * Is $\boxed{f}$ cts at g(1) ? NO
cts at $=\frac{1}{2}$

Subject Date 14th Nov No.

Q3 Is $f \circ g$ cts at $x = \frac{1}{2}$?

* Is g cts at $x = \frac{1}{2}$? yes ✓
* Is $f(x)$ cts at $g(\frac{1}{2})$? $= \boxed{1}$? yes ✓

cts at

$\boxed{f \circ g \text{ cts at } x = \frac{1}{2}}$ ✗

→ Theorem: If $\lim\limits_{x \to c} g(x) = L$ and $f(x)$ is cts at L.

$\boxed{\text{Then}}$ $\lim\limits_{x \to c} (f(g(x))) = f(\lim\limits_{x \to c} g(x)) = f(L)$

* يعني عشان أدخل النهاية لداخل الاقتران يلزم:
① الاقتران الداخلي تكون نهايته موجودة
② الاقتران الخارجي متصل عند جواب النهاية .

ex : ① $\lim\limits_{x \to 1} \sin^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$

$\sin^{-1}$ متصل على مجاله فبقدر أدخل ال lim

$\sin^{-1}\left(\lim\limits_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$ بالتعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$= \sin^{-1}\left(\lim\limits_{x \to 1} \frac{\cancel{1-\sqrt{x}}}{\cancel{(1-\sqrt{x})}(1+\sqrt{x})}\right)$

$= \sin^{-1}\left(\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

متصل عند $\frac{1}{2}$

لأنه : $\sin^{-1}$ cts $[-1, 1]$

Subject Date 14^{th} Nov No.

② $\lim_{x\to 1} \cos\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = \cos\left(\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}\right)$

cos is cts everywhere

لأنه شو ما طلع جواب ال lim
رح يكون ال cos متصل
عنده

$= \cos\left(\lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}\right)$

$= \cos\left(\lim_{x\to 1} (x+1)\right) = \cos 2$

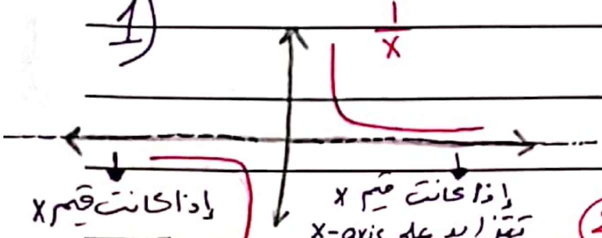
Subject Date 14th.Nov No.

* limits at Infinity:

$x \to +\infty$ تتزايد بدون حد

$x \to -\infty$ تتناقص بدون حد

1)



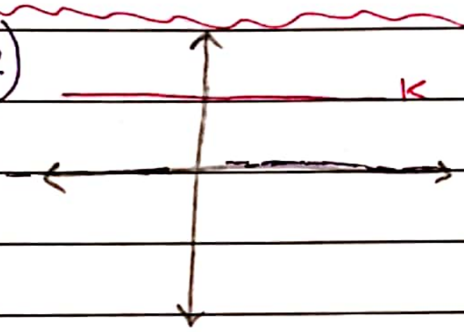
① $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

② $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

إذا كانت قيم x تتناقص على x-axis بالاتجاه السالب الصور تتناقص

إذا كانت قيم x تتزايد على x-axis بدون حد بالاتجاه الموجب الصور تتناقص إلى أن تصبح قريبة من الصفر.

2)



$\lim_{x \to +\infty} K = K$ أو $x \to -\infty$

ex ① $\lim_{x \to +\infty} \pi = \pi$ / ② $\lim_{x \to -\infty} 7 = 7$

3) $\lim_{x \to +\infty \text{ or } x \to -\infty} (f(x))^n = \left(\lim_{x \to +\infty \text{ or } x \to -\infty} f(x)\right)^n$, $\boxed{n \text{ positive integer } 1, 2, 3, 4 \ldots}$

ex: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$, find $\lim_{x \to +\infty} (f(x))^4$?

* بما أن 4 عدد صحيح موجب ∴ تدخل النهاية.

$= \left(\lim_{x \to +\infty} f(x)\right)^4 = 3^4 = 81$

④ $\lim_{x \to +\infty \text{ or } x \to -\infty} K f(x) = K \lim_{x \to +\infty \text{ or } x \to -\infty} f(x)$

Subject — Date 16^{th}. NOV No.

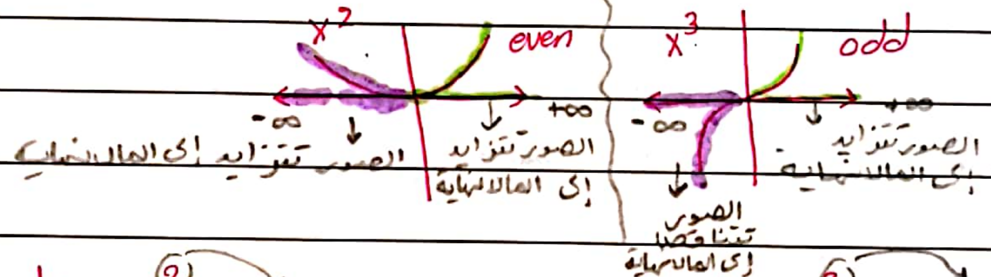
ex: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \to -\infty} 5f(x)$?

$= 5 \lim_{x \to -\infty} f(x) = 5 * 2 = 10$ ※

* $\lim$ of x^n $\quad x \to +\infty$, $x \to -\infty$

① $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, $n = 1, 2, 3 \ldots$

② $\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & n \text{ even } \quad 2, 4, 6 \ldots \\ -\infty, & n \text{ odd } \quad 1, 3, 5 \ldots \end{cases}$



$\lim_{x \to \boxed{+\infty}} x^{2} = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to \boxed{+\infty}} x^{3} = +\infty$

$\lim_{x \to \boxed{-\infty}} x^{3} = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to \boxed{-\infty}} x^{3} = -\infty$

ex: * $\lim_{x \to \boxed{+}\infty} x^{\boxed{7}} = +\infty$ $\qquad$ * $\lim_{x \to \boxed{-}\infty} x^{\boxed{7}} = -\infty$

* $\lim_{x \to \boxed{+}\infty} x^{\boxed{10}} = +\infty$ $\qquad$ * $\lim_{x \to \boxed{-}\infty} x^{\boxed{10}} = +\infty$

Subject Date 16.th NOV No.

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to -\infty}} k x^n = k \lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to -\infty}} x^n$$

بسبب → $-(+\infty) = -\infty$

$-(-\infty) = +\infty$

تؤثر فقط بالإشارة (بالمعنى العدد). k → $+$, $-$

ex: $\lim_{x \to +\infty} -5x^2 = -(+\infty) = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} -8x^7 = -(-\infty) = +\infty$

* التأثير فقط من الإشارة السالبة يعني الضرب بالموجب ما بأثر

$\lim_{x \to -\infty} 9x^7 = +(-\infty) = -\infty$

* Limits of polynomials. $x \to +\infty$, $x \to -\infty$

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to -\infty}} (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n)$$

بيهمني فقط الحد الأكبر $c_n x^n$ كيف بتصرف

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to -\infty}} c_n x^n$$

ex: ① $\lim_{x \to +\infty} \boxed{7x^5} - 4x^2 + 10x^3 + 8x - 19 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} 7x^5 = +\infty$

② $\lim_{x \to -\infty} 1 - x^2 - 3x^3 + 4x^4 - 5x^5 + \boxed{10x^6} \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} 10x^6 = +\infty$

③ $\lim_{x \to -\infty} (\boxed{-3x^3} + 2x^2 + 8)^4$

sol① $\lim_{x \to -\infty} (-3x^3)^4 = \lim_{x \to -\infty} 81x^{12} = +\infty$

sol② $(\lim_{x \to -\infty} \boxed{-3x^3} + 2x^2 + 8)^4 = (\lim_{x \to -\infty} -3x^3)^4 = (-(-\infty))^4$

$= +\infty$

Subject — Date 16^{th} . NOV No.

* Limits of rational Functions: $x \to +\infty$, $x \to -\infty$

* **Quick method** — إني أخذ أكبر قوة في البسط مع معاملها وأكبر قوة في المقام مع معاملها. ونحسب الـ limit

① $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+9}{6x-8}$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{6x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

② $\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3-2x^2+1}{1-3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3}{-3x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{5x^2}{3} = -\infty$

③ $\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2-x}{2x^3-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2}{2x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = 0$

* حل ① بدون الـ Quick method:

(*) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+9}{6x-8} = \frac{-\infty}{-\infty}$ بالتعويض المباشر ⚠ تحتاج لشغل لأنها قيمة غير محددة.

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}(3+\frac{9}{x})}{\cancel{x}(6-\frac{8}{x})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3+\cancel{\frac{9}{x}}^{\text{zero}}}{6-\cancel{\frac{8}{x}}^{\text{zero}}}$ عند التعويض

نحط نعوض مباشر

$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

* $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{2x+1}{6x-1}} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{6x-1}} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{6x}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$

لندخل الـ limit لأنه عادا خذ الجذر رح نطبق على الـ quick method على الحالة.

CRAFT NOTEBOOK

Subject   Date 16th, Nov No.

$$* \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6} = \frac{+\infty}{-\infty} \quad \nabla \text{ Undetermined form}$$

ناخذ أكبر قوة عامل مشترك من البسط والمقام

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(3-\frac{6}{x}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{x\left(3-\frac{6}{x}\right)}$$

$|x| = 0$

$$\overset{- - -}{\longleftarrow} -x \quad 0 \quad \overset{+ +}{\longrightarrow} x$$

لأنه $x \to -\infty$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-\cancel{x}\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}^{\to 0}}{\cancel{x}\left(3-\frac{6}{x}\right)^{\to 0}}$$

بالتعويض المباشر

$$= \frac{-1}{3}$$

$$* \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^6+5x^3} - x^3 = \infty - \infty \quad \nabla \text{ Undetermined form}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^6+5x^3} - x^3}{1} * \frac{\sqrt{x^6+5x^3}+x^3}{\sqrt{x^6+5x^3}+x^3}$$

نضرب بالمرافق × التربيعي

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^6}+5x^3 - \cancel{x^6}}{\sqrt{x^6+5x^3}+x^3} = \frac{\infty}{\infty}$$

بالتعويض المباشر

∇ Undetermind form صيغة

ناخذ أكبر قوة عامل مشترك من البسط والمقام

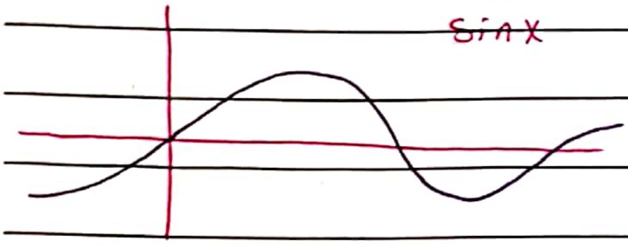
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{5x^3}{\sqrt{x^6\left(1+\frac{5}{x^3}\right)}+x^3}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{5x^3}{|x^3| * \sqrt{1+\frac{5}{x^3}}+x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5x^3}{x^3 * \sqrt{1+\frac{5}{x^3}}+x^3}$$

$$\overset{-}{\longleftarrow} -x^3 \quad 0 \quad \overset{+}{\longrightarrow} \boxed{x^3}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}\left(\sqrt{1+\frac{5}{x^3}^{\to 0}}+1\right)} = \frac{5}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{5}{2}$$

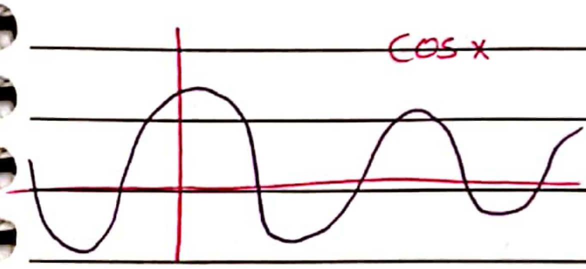
Limits at infinity :



$* \lim_{x \to +\infty} \sin x = d.n.e$

$* \lim_{x \to -\infty} \sin x = d.n.e$

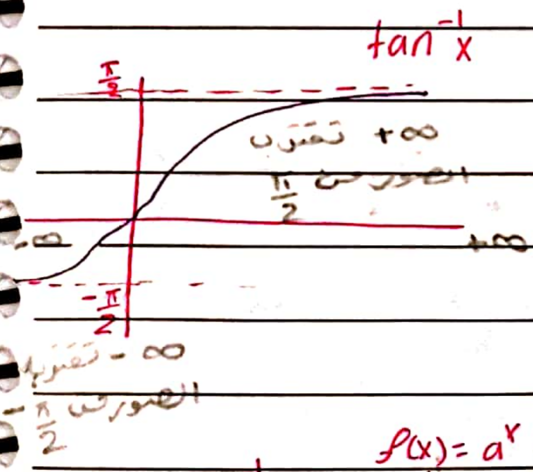
لأنه يتردد (يتذبذب) بين ال 1 - و 1+



$* \lim_{x \to +\infty} \cos x = d.n.e$

$* \lim_{x \to -\infty} \cos x = d.n.e$

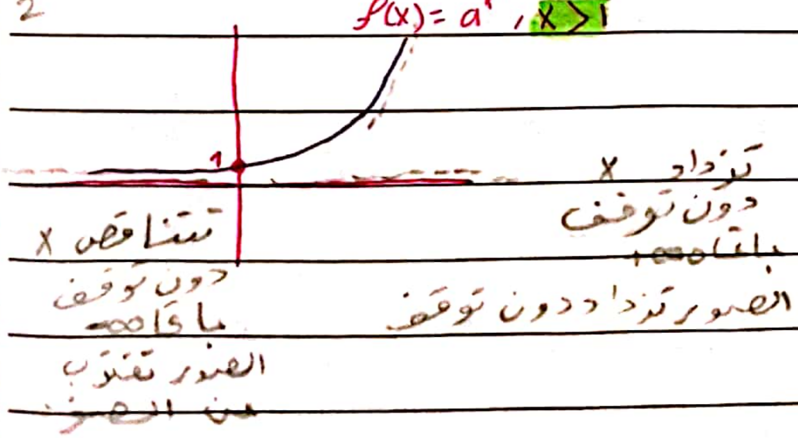
* لنفس سبب sinx .



$* \lim_{x \to +\infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

$* \lim_{x \to -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2}$

$f(x) = a^x$, $x > 1$



$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$

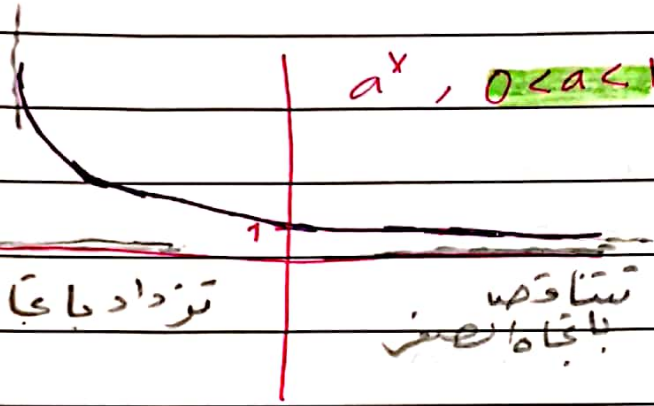
$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$

Subject Date 16^{th} . NOV No.

ex: ① $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ ② $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

③ $\lim_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$ ④ $\lim_{x \to -\infty} 5^x = 0$

a^x , $0<a<1$



$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$

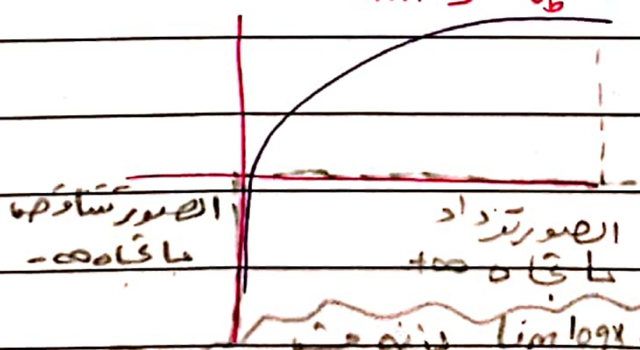
$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$

عكس الحالة $a^x , a>1$

ex: ① $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$ $(0<\frac{1}{2}<1)$ ② $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = +\infty$ $(0<\frac{1}{3}<1)$

③ $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ ④ $\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

$\ln x$ و $\log_b x$, $b>1$



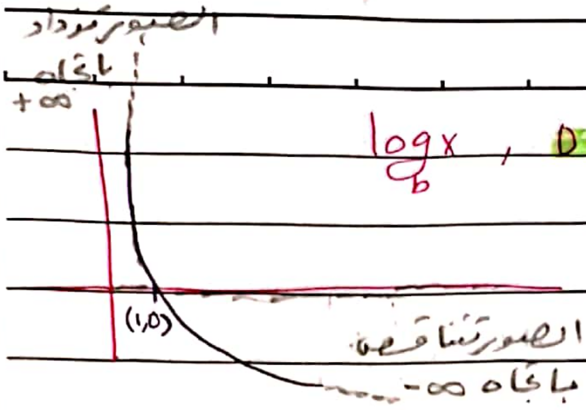
$\lim_{x \to +\infty} \log_b x = +\infty$

$\lim_{x \to 0^+} \log_b x = -\infty$

x خارج بيسأل عن $\lim_{x \to -\infty} \log_b x$ لأنه مش من ضمن الDomain تبع اللوغارتم

ex: ① $\lim_{x \to +\infty} \log_5 x = +\infty$ ② $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ ③ $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

Subject Date 16th. NOV No.



$\log_b x \;,\; 0<b<1$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_b x = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \log_b x = +\infty$$

عكس حالة $b>1$, $\log_b x$

ex: ① $\lim_{x\to+\infty} \log_{0.5} x = -\infty$ ② $\lim_{x\to 0^+} \log_{\frac{1}{4}} x = +\infty$

① $\lim_{x\to+\infty} \tan^{-1}(e^x) = \tan^{-1}(\lim_{x\to+\infty} e^x) = \tan^{-1}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$

② $\lim_{x\to 0^+} \tan^{-1}(\ln x) = \tan^{-1}(\lim_{x\to 0^+} \ln x) = \tan^{-1}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$

③ $\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$; $\lim_{x\to 0^+} = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} = -\infty$

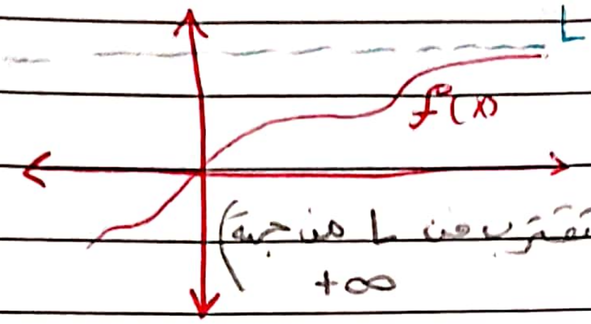
$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$ | $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+e^{-\infty}} = \frac{1}{1+0} = 1$

$\therefore$ d.n.e

Subject Date 18th. Nov No.

* Horizontal Asymptotes:

* خطوط التقارب الأفقية.

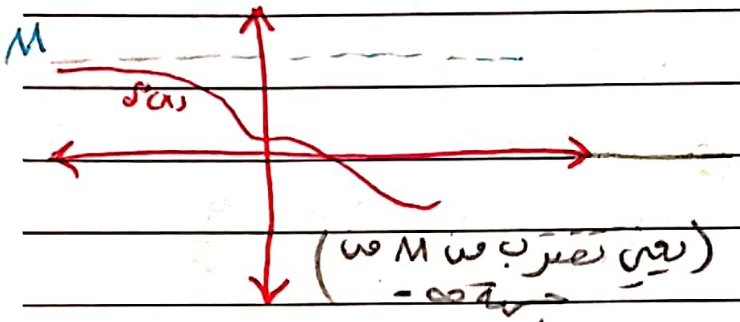


$y = L$ is H. asy

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$

(يعني تقترب من L من جهة $+\infty$)

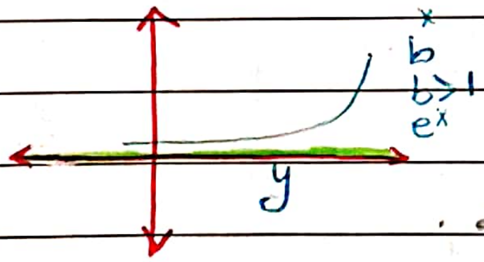
أو



$y = M$ is H. asy

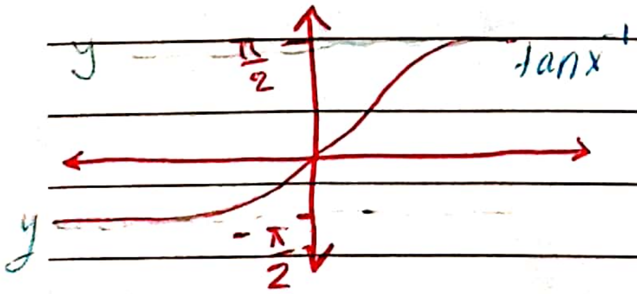
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = M$

(يعني تقترب من M من جهة $-\infty$)



$\lim_{x \to -\infty} b^x = 0$ $y = 0$ is H. asy

لـهو y-axis بهاي الحالة.



$\lim_{x \to +\infty} \tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1}x = -\frac{\pi}{2}$

$\therefore y = \frac{\pi}{2} \,/\, y = -\frac{\pi}{2}$ H. asy

Subject Date 18th Nov. No.

$f(x) = x^2 + x - 1$ No H. asy.

b^x مثلا $\boxed{1}$ Horizontal asymptote : function لل بيكون set

$\tan^{-1}x$ مثلا $\boxed{2}$ أو Horizontal asymptotes

poly مثلا كثيرات الحدود $\boxed{0}$ أو Horizontal asymptote

Ex : Find the H.asy ? نحسب ال lim لل f(x)

① $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$\rightarrow y = 1$ H. asy

② $f(x) = \dfrac{2x - 1}{|x| - 3}$ $|x|$: $\xleftarrow{\;-\;}\; 0 \;\xrightarrow{\;+\;}$ $-x$, x

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x-1}{|x|-3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x-1}{x-3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x-1}{|x|-3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x-1}{-x-3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{-x} = -2$$

$y = 2$, $y = -2$ are H. asy

Subject   Date 18^{th}. NOV No.

* The squeeze Thm : نظرية الشطيرة

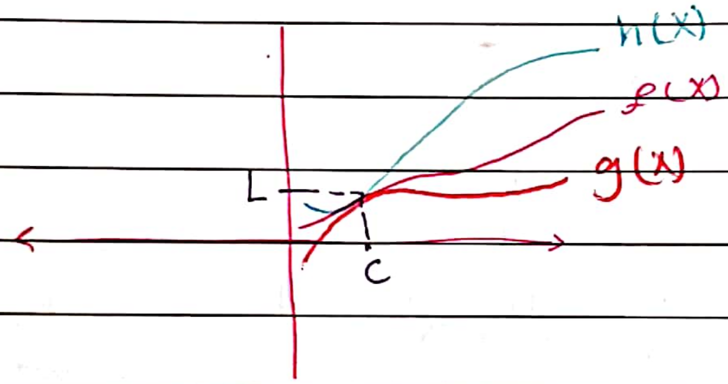
نظرية محصة بين الشبابيك

let f, g, h be functions, S

$$g(x) \le f(x) \le h(x)$$

if $\lim_{x \to c} h(x) = \lim_{x \to c} g(x) = L$

Then $\lim_{x \to c} f(x) = L$



ex : $\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \cdot \text{d.n.e}$ الحل العادي

(غير مقبول)

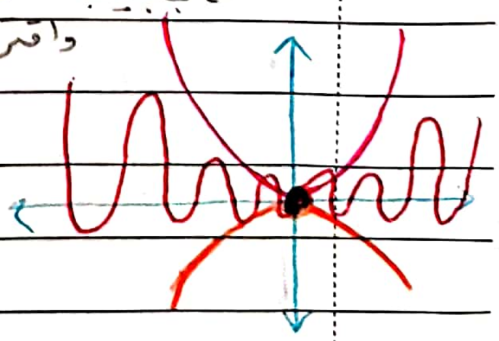
$|g(x)| \le x^2 \sin\frac{1}{x} \le |h(x)|$

يجب اقتران أكبر واقتران أصغر

$$-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1 \quad * x^2$$

$$-x^2 \le x^2 \sin\frac{1}{x} \le x^2$$

$\lim_{x \to 0} -x^2 = 0$ $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$



$\lim_{x \to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$ by squeeze Thm

CRAFT NOTEBOOK

Subject Date 18^{th} .Nov.

Ex: $1 - x^2 \le f(x) \le \cos x$

$\lim_{x \to 0} f(x)$? $\lim_{x \to 0} 1 - x^2 \le \lim_{x \to 0} f(x) \le \lim_{x \to 0} \cos x$

$1 \le \lim_{x \to 0} f(x) \le 1$

by S.T $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ #

Scanned with CamScanner

Subject Date 18th Nov No.

* Limits of trigonometric functions :

① $\lim\limits_{x \to \pi} \sin x = \sin \pi = 0$ * تعويض مباشر Sin متصل عند π و π موجودة في الـ domain

② $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \cos x = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ← *تعويض مباشر

③ $\lim\limits_{x \to \pi} \tan x = \tan \pi = 0$ ← *تعويض مباشر

④ $\lim\limits_{x \to \boxed{\frac{\pi}{2}}} \tan x =$ * بالتعويض المباشر غير معرف لأنه $\frac{\pi}{2}$ لا تنتمي لـ Domain الـ tan

اذكر ← $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0}$ نختبر الإشارة

$\theta < \frac{\pi}{2}$: + + + ; $\theta > \frac{\pi}{2}$: − − − −

$0 \quad |Q_1| \quad \frac{\pi}{2} \quad |Q_2| \quad \pi$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$

d.n.e

⑤ $\lim\limits_{x \to 2\pi^-} \csc x = \lim\limits_{x \to 2\pi} \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin 2\pi} = \frac{1}{0}$

$|Q_4| \; 2\pi$

$\therefore \Rightarrow -\infty$

Scanned with CamScanner

Subject Date 18th Nov No.

$$\boxed{\textbf{Thm} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

بالتعويض المباشر $= \frac{0}{0}$ undetermined form

* يمكن إثباتها عن طريق لوبيتال

(*) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$ $\frac{\text{معامل}}{\text{معامل}}$

(*) $\lim_{x \to 0} \frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$ $\frac{\text{معامل}}{\text{معامل}}$

(*) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$ $\frac{\text{معامل}}{\text{معامل}}$.

(*) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$ $\frac{\text{معامل}}{\text{معامل}}$

(*) $\lim_{x \to 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$ $\frac{\text{معامل}}{\text{معامل}}$.

(*) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$ $\frac{\text{معامل}}{\text{معامل}}$

(*) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$ $\frac{\text{معامل}}{\text{معامل}}$

(*) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$ $\frac{\text{معامل}}{\text{معامل}}$.

Subject Date 18^{th} Nov No.

ex ① $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{5x} = \frac{7}{5}$

② $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin \pi x} = \frac{1}{\pi}$

③ $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 8x}{\sin 10x} = \frac{8}{10}$

④ $\lim_{x\to 0} \frac{3x + \tan x}{\sin x + x}$ تعويض مباشر $\frac{3\times 0 + 0}{0+0} = \frac{0}{0}$ ∇ $\frac{?}{0}$

نطلع ← $\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(3 + \frac{\tan x}{x})}{\cancel{x}(\frac{\sin x}{x} + 1)}$ عامل مشترك من البسط والمقام

$= \frac{3+1}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$

⑤ $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$ تعويض مباشر $\frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ ∇ $\frac{?}{0}$

نطلع ← $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} * \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$ نضرب بمرافق البسط

$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x(1+\cos x)}$ متطابقة

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} * \frac{\sin x}{1+\cos x}$ نوزع النهاية

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} * \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1+\cos x}$ → تعويض مباشر

$= 1 * \frac{0}{1+1} = 0$

Subject Date 18th Nov No.

Ex :

$$f(x) = \begin{cases} 1+\sin x & , x<0 \\ \cos x & , 0<x\leq \pi \\ \sin x & , x>\pi \end{cases}$$

Find: ① $\lim_{x\to 0} f(x)$ ② $\lim_{x\to} f(x)$??

① $\lim_{x\to 0} f(x) =$ $\lim_{x\to 0^+} \cos x = 1$ تعويض مباشر
$\lim_{x\to 0^-} 1+\sin x = 1+0 = 1$ تعويض مباشر
$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

② $\lim_{x\to \pi} f(x) =$ $\lim_{x\to \pi^+} \sin x = \sin\pi = 0$ تعويض مباشر
$\lim_{x\to \pi^-} \cos x = \cos\pi = -1$ تعويض مباشر
$\lim_{x\to\pi} f(x)$ d.n.e

Ex : Suppose that $\lim_{x\to 0} f(x) = 4$

Find $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 8x}{x\, f(4x)}$??

① أولاً: نفرض ما داخل ال f = y
② نغير الاقتراب من x الى y
③ نغير كل x في المطلوب الى y

$4x = y \Rightarrow x = \frac{y}{4}$

$x \to 0$

$y \to 0$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\tan 8(\frac{y}{4})}{\frac{y}{4} f(y)} \rightarrow \lim_{y\to 0} \frac{4\tan 2y}{y f(y)} \rightarrow 4\lim_{y\to 0} \frac{\tan 2y}{y f(y)}$$

$$\Rightarrow 4\lim_{y\to 0} \frac{\tan 2y}{1y} * \lim_{y\to 0} \frac{1}{f(y)}$$

منا تعويض

$$= 4 * 2 * \frac{1}{4} = 2$$

بسم الله الرحمن الرحيم

The Derivative Of Function: الاشتقاق

* تعريف المشتقة عند نقطة: (المشتقة الأولى)

prime

$$f(x) \longrightarrow f'(a) = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=a} = \frac{d}{dx}\Big|_{x=a}$$

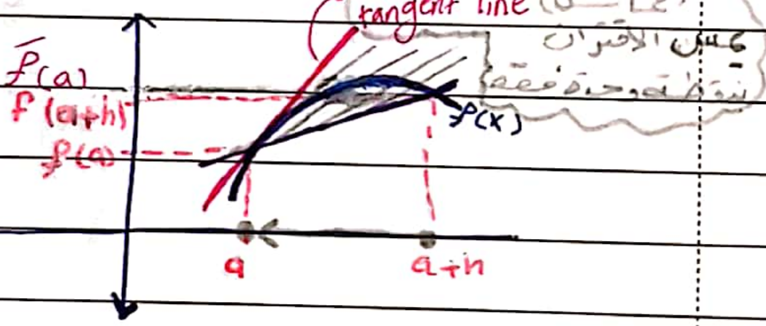
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{exist}$$

* قابل للاشتقاق عند a *

* المقصود بالمشتقة الأولى هندسياً:

ميل المماس

Slope of tangent $= f'(a)$



نحصل على المماس عن طريق إيجاد القاطع

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \boxed{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}} \rightsquigarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(b)}{h}$$

كل قرب الاقتران من القاطع سيمثل المشتقة الأولى عندما $\boxed{h\to 0}$

* كتابة التعريف بطريقة أخرى:

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Ex: Find the derivative of the function

$f(x) = x^2$??

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

تعويض مباشر

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2*h*x + h^2 - \cancel{x^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \frac{0}{0}$$

إجراء

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x$$

$$\boxed{\therefore f'(x) = 2x}$$

ex

$\to f'(5) = 2*5 = 10$

* Differentiation Rules *

[1] $\frac{d}{d(x)}(c) = 0$, $c \in R$ مشتقة الثابت = صفر

Ex: $f(x) = 10 \longrightarrow f'(x) = 0$

[2] $\frac{d}{d(x)}(x^n) = nx^{n-1}$

Ex①: $f(x) = x^5 \longrightarrow f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$

Ex②: $y = x^{-7} \longrightarrow y' = -7x^{-7-1} = -7x^{-8}$

[3] $\frac{d}{d(x)}(cf) = cf'$

Ex: $y = 7x^2 \longrightarrow y' = 7*(2)x^{2-1} = 14x$

Subject Date 21th. Nov No.

④ $\frac{d}{dx}(f \pm g) = f' \pm g'$

Ex: $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} + \frac{12}{x} + 7$

$f(x) = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{3}} + 12x^{-1} + 7$

$\hookrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{(\frac{1}{2}-1)} + \frac{2}{3}x^{(\frac{2}{3}-1)} + 12x^{(-1-1)} + 0$

$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - 12x^{-2}$

⑤ $\frac{d}{dx}(\overset{\text{الأول}}{f}\overset{\text{الثاني}}{g}) = fg' + gf'$ ⇒ الأول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الأول

Ex: $y = \underset{①}{(8x+3)} * \underset{②}{(x^2-3x)}$

$\frac{dy}{dx} = ① * ②' \boxed{+} ② * ①'$

$(8x+3)*(2x-3) + (x^2-3x)*8$

⑥ $\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gf' - fg'}{g^2}$ ⇒ $\frac{\text{المقام × مشتقة البسط − البسط × مشتقة المقام}}{\text{(المقام)}^2}$

Ex① $f(x) = \frac{x^2}{x^3+5x} \longrightarrow f'(x) = \frac{(x^3+5x)*(2x) - (x^2)*(3x^2+5)}{(x^3+5x)^2}$

Ex② $f(x) = \frac{x^4-1}{8x^3+2x^2} \longrightarrow f'(x) = \frac{(8x^3+2x^2)*(4x^3) - (x^4-1)*(24x^2+4x)}{(8x^3+2x^2)^2}$

حالة خاصة من القاعدة ⑥

⑦ $\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{f}\right) = \frac{-c * f'}{(f)^2}$

Ex: $f(x) = \frac{7}{x^3+10x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-7*(3x^2+10)}{(x^3+10x)^2}$

Subject Date 21th. NOV No.

Ex :

⇐ أمثلة على إيجاد المشتقة عند نقطة ←

① $f(x) = \frac{7x-1}{x^2+5}$, find $f'(2)$

- نجد المشتقة بدلالة (x) باستخدام قواعد الاشتقاق
- نعوض الرقم المراد إيجاد المشتقة عنده.

$\Rightarrow f'(x) = \frac{(x^2+5)*(7) - (7x-1)*(2x)}{(x^2+5)^2}$

$f'(2) = \frac{(2^2+5)*7 - (7*2-1)*(2*2)}{(2^2+5)^2} = \frac{11}{81}$

② $f(x) = \underset{①}{(10x-1)}\underset{②}{(8x^2+5)}$, find $f'(1)$

$\Rightarrow f'(x) = (10x-1)*(16x) + (8x^2+5)*(10)$

$f'(1) = (10-1)*16 + (8+5)*10$

$= 274$

Chain Rule 8 قاعدة السلسلة

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) * g'(x)$$

Ex: $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = \frac{4}{x^2+1}$

Find $(f\circ g)'(1)$?

$\frac{d}{dx}(f(g(x)) = f'(g(x)) * g'(x)$

$= (f\circ g)' = f'(g(1)) * g'(1)$

$= f'(2) * g'(1)$

$= f'(2) * -2$

$= 5 * -2$

$= -10$

$g(1)$??

$= \frac{4}{x^2+1} = \frac{4}{1^2+1} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$

$g'(x) = \frac{-4(2x)}{(x^2+1)^2}$

$g'(1) = \frac{-4*2}{(1+1)^2} = \boxed{-2}$

$f'(x) = 2x+1$

$f'(2) = 2*2+1$

$= \boxed{5}$

Subject Date 21th. NOV No.

* من تطبيقات قاعدة السلسلة :

$$\frac{d}{d(x)}(f(x))^n = n(f(x))^{n-1} f'(x)$$ توضيح نشتق القاعدة

$$\frac{d}{dx}\left(f(g(x))\right) = f'(g(x)) * g'(x)$$

$f(x) = x^n$

$f'(x) = nx^{n-1}$

نطبقها $\frac{d}{d(x)}(g(x))^n = n(g(x))^{n-1} g'(x)$

مكان كل x نحط g(x)

Ex: $\Longrightarrow$ Find y' ?

① $y = (x^2+5)^{10} \rightarrow 10(x^2+5)^9 * 2(x)$

أي مارح ينفع أفك القوس لعشرة فبستخدم قاعدة السلسلة.

② $y = (x^7-2)^{-5} \longrightarrow -5(x^7-2)^{-6} * 7x^6$

③ $y = \sqrt[3]{x^2+1} \longrightarrow (x^2+1)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(x^2+1)^{-\frac{2}{3}} * (2x)$

④ $y = \sqrt{x^3+x^2}$

Sol① $(x^3+x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x^3+x^2)^{-\frac{1}{2}} * 3x^2+2x$

$$= \frac{3x^2+2x}{2\sqrt{x^3+x^2}}$$

Sol② * قاعدة الجذر التربيعي :

$$\frac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$ مشتقة داخل الجذر / ٢ * الجذر نفسه

الحل $\Rightarrow \dfrac{3x^2+2x}{2\sqrt{x^3+x^2}}$

Subject

Date 21th Nov No.

* فرع آخر من السؤال ④ ⇐

* find $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ بعد ما نشتق الاقتران بعوض

$$= \frac{3(1)^2 + 2(1)}{2\sqrt{1+1}} = \frac{5}{2\sqrt{2}}$$

If $f(2x+5) = x^3 + 2x^2 + 4$ find $f'(3)$?

$g(x)$ هون بنشتق على قاعدة السلسلة باعتبار إنها $f(g(x))$

⇐ نشتق الطرفين :

$f'(2x+5) * 2 = 3x^2 + 4x$

$= 2f'(3) = 3(-1)^2 + 4*-1 = -1 \;/2$

$\boxed{f'(3) = \frac{-1}{2}}$

نساوي ما داخل القوس بـ 3 لأنه لازم تكون المشتقة بالنسبة لـ 3

$2x+5 = 3$

$2x = -2$

$\boxed{x = -1}$

نعوض كل x بـ -1

$\frac{d}{d(x)}\left(f(x^3)\right) = 12x^{17}$ find $f'(x)$? ⇒

بصيغة هذا السؤال إنه موضح المشتقة لـ $f(x^3)$ فقط بنشتق الطرف اليسار لأنه الطرف اليمين أصلاً جاهز ومشتق من السؤال

الحل : ⊛ الاشتقاق على قاعدة السلسلة

$f'(x^3) * 3x^2 = 12x^{17} \div 3x^2$

$f'(x^3) = \frac{12x^{17}}{3x^2}$

$f'(x^3) = 4x^{15}$

$f'(y) = 4(y^{1/3})^{15}$ نستبدل الـ (x^3) لأنه بالسؤال عندي (x)

$f'(y) = 4y^5$ ※

$x^3 = y \rightarrow x = y^{1/3} \Rightarrow$ مكان كل x بحط $\boxed{y^{1/3}}$

بعيد كتابتها بدلالة x

$f'(x) = 4x^5$

CRAFT NOTEBOOK

Derivatives of Trigonometric functions:

* إلي بيلبشوا داغًا بـ co تكون مشتقتهم بالسالب cos / cot / csc

$$* \frac{d}{dx}\left(\sin(f(x))\right) = \cos f(x) * f'(x)$$

Ex: $y = \sin(x^3) \longrightarrow y' = \cos(x^3)(3x^2)$

$$* \frac{d}{dx}\left(\cos(f(x))\right) = -\sin f(x) * f'(x)$$

Ex: $y = \cos(5x^2+10) \longrightarrow y' = -\sin(5x^2+10)(10x)$

$$* \frac{d}{dx}\left(\tan(f(x))\right) = \sec^2(f(x)) * f'(x)$$

Ex: $y = \sqrt{\tan x} \longrightarrow y' = \frac{\sec^2 x}{2\sqrt{\tan x}}$

$$* \frac{d}{dx}\left(\cot(f(x))\right) = -\csc^2(f(x)) * f'(x)$$

الحل على قاعدة السلسلة:

Ex: $y = \cot^3(x^2) \xrightarrow{\text{تعديل}} y = (\cot x^2)^3$

$y' = 3(\cot x^2)^2 * (-\csc^2 x^2) * 2x$

$$* \frac{d}{dx}\left(\sec(f(x))\right) = \sec(f(x))\tan(f(x))f'(x)$$

Ex: $y = \sec\left(\frac{2}{x+1}\right) \longrightarrow y' = \sec\left(\frac{2}{x+1}\right)\tan\left(\frac{2}{x+1}\right)\left(\frac{-2(1)}{(x+1)^2}\right)$

$$* \frac{d}{dx}\left(\csc(f(x))\right) = -\csc(f(x))\cot(f(x))f'(x)$$

Ex: $y = \csc(x^3) \longrightarrow y' = -\csc(x^3)\cot(x^3)(3x^2)$

Subject Date 21^{th} NOV No.

* Ex : $y = \sin x + \cos x$, find $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\pi/2}$

$\Rightarrow y' = \cos x - \sin x$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}$

$= 0 - 1 = -1$ #

* لحد هون مادة امتحان الميد *

"اللَّهُمَّ افْتَحْ لِي أَبْوَابَ حِكْمَتِكَ، وَانْشُرْ عَلَيَّ
رَحْمَتَكَ، وَامْنُنْ عَلَيَّ بِالفَهْمِ وَالحِفْظِ، سُبْحَانَكَ
لَا عِلْمَ لَنَا إِلَّا مَا عَلَّمْتَنَا، إِنَّكَ أَنْتَ العَلِيمُ الحَكِيمُ."

Subject Date 23rd. NOV No.

* Derivative of exponential functions:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(b^{f(x)}\right) = b^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln b}$$

Ex ① $y = 5^{x^2} \longrightarrow y' = (5^{x^2})(2x)(\ln 5)$

② $y = 2^{\cos x} \longrightarrow y' = (2^{\cos x})(-\sin x)(\ln 2)$

③ $y = 3^x \longrightarrow y' = 3^x \ln 3$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(e^{f(x)}\right) = e^{f(x)} f'(x)}$$

المفروض على القاعدة فوق أكمل الاشتقاق ln e لكنه بساوي واحد فا بحذفه.

ضرب اقترانين

Ex ① $y = e^{x \tan x} \longrightarrow y' = (e^{x \tan x})(x \sec^2 x + \tan x)$

② $y = e^{\sqrt{1-5x^3}} \longrightarrow y' = (e^{\sqrt{1-5x^3}})\left(\frac{-15x^2}{2\sqrt{1-5x^3}}\right)$

③ $y = e^x \longrightarrow y' = e^x$ ← بتضل زي ما هي.

④ $y = e^{-x} + \pi^{-x} \longrightarrow y' = (e^{-x})(-1) + (\pi^{-x})(-1)(\ln \pi)$

$= -e^{-x} - (\ln \pi)(\pi^{-x})$

هاي على القاعدة الأولى $(b^{f(x)})$

CRAFT NOTEBOOK

Subject   Date 23^{th}. NOV No.

Ex if $f(x) = e^{x} g(x)$, $g(0) = 2$

$g'(0) = 5$

find $f'(0)$??

$f(x) = e^{x} g(x) \longrightarrow f'(x) = e^{x} * g'(x) + g(x) e^{x}$

حاصل ضرب اقترانين

$f'(0) = e^{0} * g'(0) + g(0) e^{0}$

$1 * 5 + 2 * 1 = 7$

---

* Derivatives of logarithmic functions :

$$\frac{d}{d(x)} \left(\log_{b} f(x)\right) = \frac{f'(x)}{f(x) \ln b} \quad , \quad f(x) > 0$$

Find y' ?

① $y = \log_{2}(x^{3}+5) \longrightarrow y' = \dfrac{3x^{2}}{(x^{3}+5) \ln 2}$

② $y = \log(\sin x) \longrightarrow y' \dfrac{\cos x}{(\sin x) \ln 10} = \dfrac{\cot x}{\ln 10}$

لأنه الأساس ـــ مش مكتوب بالسؤال فبكون 10

$$\frac{d}{d(x)} \left(\ln(f(x))\right) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad , f(x) > 0$$

هو نفسه log لكن الأساس إله e

(هيا المفروض بالنسبة لقاعدة log إنه ينضرب f(x) بالأساس ln بس أساسه e فبتساوي (1) ما بيتغير)

find y' ?

① $y = \ln x \longrightarrow y' = \dfrac{1}{x}$

② $y = \ln(x^{2}+1) \longrightarrow y' = \dfrac{2x}{x^{2}+1}$

Subject Date 23th. Nov No.

③ $y = \ln(\cos e^x) \longrightarrow y' = \dfrac{(-\sin e^x)\, e^x}{\cos e^x} = (-\tan e^x)\, e^x$

④ $y = \ln(\ln x)$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=e}$

$\Rightarrow y' = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x} \rightarrow \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=e} \dfrac{\frac{1}{e}}{\ln e} = \dfrac{\frac{1}{e}}{1} = \dfrac{1}{e} = e^{-1}$

⑤ $y = \ln|\sin x + x|$, $\dfrac{d}{dx}\ln|x| = \dfrac{1}{x}$ → يعني بتجاهل وجود الـ Absolute Value

$\Rightarrow y' = \dfrac{\cos x + 1}{\sin x + x}$

Ex:

① $y = \log_7 x$

الأساس عدد (يعني بمشي على القاعدة الأصلية بعد الـ log)

الحل

$\Rightarrow y' = \dfrac{1}{x \ln 7}$

② $y = \log_x 7$

الأساس متغير (function)

(بدها معالجة).

الحل

$\Rightarrow$ من خصائص اللوغاريتمات:

$\log_b a = \dfrac{\ln a}{\ln b}$

$\Rightarrow y = \dfrac{\ln 7}{\ln x}$ جاهزة للاشتقاق ← هاي عبارة عن ثابت / اقتران

$y' = \dfrac{-\ln 7 * \left(\frac{1}{x}\right)}{(\ln x)^2} = \dfrac{-\ln 7}{x(\ln x)^2}$

Subject Date 23th Nov No.

Ex: find y' ?

① $y = \ln\left(\frac{x^2 \sin x}{\sqrt{1+x}}\right)$ هاي بالاشتقاق المباشر رح يكون حلها طويل ومعقد

نحلها بخصائص الـ ln

⊖ خصائص ln :

$y = \ln x^2 \sin x - \ln\sqrt{1+x}$ * القسمة نحولها للطرح.

$y = \ln x^2 + \ln \sin x - \ln(1+x)^{\frac{1}{2}}$ * الضرب نحوله لجمع.

$y = 2\ln x + \ln \sin x - \frac{1}{2}\ln(1+x)$ * الأس بينزل جنب الـ ln

$y' = 2\frac{1}{x} + \frac{\cos x}{\sin} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}\right)$

② $y = \log_4\left(\frac{\cos x}{(x-1)^3(x^2+1)^4}\right)$ نفس خصائص الـ ln فوق

نحلها بخصائص الـ log

$y = \log_4 \cos x - \log_4 (x-1)^3(x^2+1)^4$

$y = \log_4 \cos x - \log_4 (x-1)^3 + \log_4 (x^2+1)^4$

$y = \log_4 \cos x - 3\log_4 (x-1) + 4\log_4 (x^2+1)$

$y' = \frac{-\sin x}{\cos x \ln 4} - 3\frac{1}{(x-1)\ln 4} + 4\frac{2x}{(x^2+1)\ln 4}$

$= \ln 4(-\tan - \frac{3}{x-1} + \frac{8x}{x^2+1}$

CRAFT NOTEBOOK

Subject Date 23^{th}. NOV No.

* Derivatives of inverse trigonometric functions:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}(f(x))\right) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}} \quad , \quad \boxed{\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}(f(x))\right) = \frac{\ominus f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}}$$

*** find y'?**

① $y = \sin^{-1} x \longrightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

② $y = \sin^{-1}(\ln x) \longrightarrow y' = \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1-(\ln x)^2}}$

*** find y'?**

(*) $y = \cos^{-1}(x^2) \longrightarrow y' = \frac{-2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \frac{-2x}{\sqrt{1-(x)^4}}$

$$\boxed{\frac{d}{dx} \tan^{-1}(f(x)) = \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}} \quad , \quad \boxed{\frac{d}{dx} \cot^{-1}(f(x)) = \frac{\ominus f'(x)}{1+(f(x))^2}}$$

Ex: ① $y = \tan^{-1} x \longrightarrow y' = \frac{1}{1+(x)^2}$

② $y = \tan^{-1} e^x$

$\hookrightarrow y' = \frac{e^x}{1+(e^x)^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$

Ex: ① $y = \cot^{-1}(x^2+1) \longrightarrow y' = \frac{-2x}{1+(x^2+1)^2}$

Subject Date 23th NOV No.

$$\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1}f(x)\right) = \frac{f'(x)}{|f(x)|\sqrt{(f(x))^2-1}} \quad , \quad \frac{d}{dx}\left(\csc^{-1}f(x)\right) = \frac{-f'(x)}{|f(x)|\sqrt{f(x)^2-1}}$$

Ex: ① $y = \sec^{-1}x \longrightarrow y' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

② $y = \sec^{-1}(x^3) \longrightarrow y' = \frac{3x^2}{|x^3|\sqrt{(x^3)^2-1}} = \frac{3x^2}{|x^3|\sqrt{x^6-1}}$

Ex: ① $y = \csc^{-1}(\ln x) \longrightarrow y' = \frac{-\frac{1}{x}}{|\ln x|\sqrt{(\ln x)^2-1}}$

* ملاحظة:

⊛ لمشتقة الاقترانات المثلثية العكسية يكون البسط دائماً مشتقة ما داخل الـ inverse.

⊛ الفرق بين مشتقة $\sin^{-1}$ و $\cos^{-1}$ في وجود الإشارة السالبة في مشتقة $\cos^{-1}$

⊛ الفرق بين مشتقة $\tan^{-1}$ و $\cot^{-1}$ في وجود الإشارة السالبة في مشتقة $\cot^{-1}$

⊛ الفرق بين مشتقة $\sec^{-1}$ و $\csc^{-1}$ في وجود الإشارة السالبة في مشتقة $\csc^{-1}$

* الجذر موجود في مشتقة $\sin^{-1}$ و $\sec^{-1}$ لكن عكس بعضهما أما $\tan^{-1}$ لا يوجد في مشتقته جذر.

CRAFT NOTEBOOK

Subject   Date 25^{th}

Higher Derivatives المشتقات العليا

$f, f', f'', f''', f^{(4)}, f^{(5)}, \dots, f^{(n)}$

$\hookrightarrow y, \frac{d}{dx}, \frac{d^2}{dx^2}, \frac{d^3}{dx^3} \dots\dots, \frac{d^n}{dx^n}$

$\frac{dy}{dx} \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3} \dots\dots \quad \frac{d^ny}{dx^n}$

Ex: $f(x) = x^5$, find $f^{(4)}, f^{(5)}, f^{(6)}$

لـ حسابات أقدر
أوصل للمشتقة الرابعة
لازم أوجد الأولى والثانية
والثالثة ما بقدر
أوجدها مباشرة.

$f'(x) = 5x^4$

$f''(x) = 20x^3$

$f'''(x) = 60x^2$

$f^{(4)}(x) = 120x$

$f^{(5)}(x) = 120$

$f^{(6)}(x) = 0$

أي مشتقة بعدها
رح تضل أصفار

خاصية الـ polynomial :

$f(x) = a_0 + a_1x + \dots\dots + a_nx^n$

$f^{(n)}(x) = n!$, $f^{(m)}(x) = 0, m > n$

توضيح :

Ex: $f(x) = x^7$, find $f^{(7)}, f^{(8)}$

$f^{(7)} = 7!$, $f^{(8)} = 0$

Ex : $y = 3^x$ find $\left.\frac{d^{10}y}{dx^{10}}\right|_{x=0}$

$y' = 3^x \underline{\ln 3}$ → عدد ثابت

$y'' = 3^x \ln 3(\ln 3) \rightarrow 3^x(\ln 3)^2$

$y''' = 3^x \ln 3(\ln 3)^2 \rightarrow 3^x(\ln 3)^3$

$\vdots$

$\frac{d^{10}y}{dx^{10}} = 3x(\ln 3)^{10}$

$\left.\frac{d^{10}y}{dx^{10}}\right|_{x=0} = 3^0(\ln 3)^{10} = (\ln 3)^{10}$

Ex : $f(4) = 3$, $f'(4) = 2$, $f''(4) = 5$

find $\left(\frac{f'}{f}\right)'(4)$

نشتق بالبداية وبعدين

نعوض

$\left(\frac{f'}{f}\right)'(x) = \frac{f(x) * f''(x) - f'(x) * f'(x)}{(f(x))^2} = \frac{f(4) f''(4) - (f'(4))^2}{(f(4))^2}$

$= \frac{3 * 5 - (2)^2}{(3)^2} = \frac{11}{9}$

Subject　　　　Date 25^{th} Nov No.

Ex: $y = \cos^3 x + 5\tan x$ find y'' ?

$y' = \underbrace{3\cos^2 x(\sin x)}_{\text{ضرب اقترانين}} + 5\sec^2 x$

$y'' = (3\cos^2 x) * \cos x + (\sin x) * 3(2\cos x)(-\sin x) + 5 * (2\sec x) * (\sec x)(\tan x)$

$\Rightarrow 3\cos^3 x + (-6\sin^2 x\cos x) + 10\sec^2 x\tan x$.

Implicit differentiation: الاشتقاق الضمني

← يعني ع أشتق علاقات (x, y) مع بعض وشكلها
علاقة بشتقها كما هي (بدون ما أفصل الـ y عن x).

$y \to y'$

① $y^4 \to 4y^3 y'$

② $e^y \to e^y y'$

③ $\sin y \to \cos y \, y'$

④ $\sin^{-1} y \to \dfrac{y'}{\sqrt{1-y^2}}$

Ex find y' ? → الهدف إني أخلي y' لحالها

① $x^3 + y^3 = 1$

$3x^2 + 3y^2 * y' = 0 \Rightarrow \dfrac{3y^2 y'}{3y^2} = \dfrac{-3x^2}{3y^2} \Rightarrow y' = \dfrac{-3x^2}{3y^2} = \dfrac{-x^2}{y^2}$

② $\underbrace{e^y \sin x}_{\text{ضرب اقترانين}} = x + \underbrace{x^3 y^2}_{\text{ضرب اقترانين}}$

$e^y \cos x + \sin x \, e^y y' = 1 + x^3(2yy') + y^2(3x^2)$

تتبع حل السؤال

CRAFT NOTEBOOK

نحط كل y' على طرف واحد

$$e^y(\sin x)y' - 2x^3yy' = 1 + 3x^2y^2 - e^y\cos x$$

$$y'(e^y\sin x - 2x^3y) = 1 + 3x^2y^2 - e^y\cos x$$

$$y' = \frac{1 + 3x^2y^2 - e^y\cos x}{e^y\sin x - 2x^3y}$$

Ex $f(1) = 3$ and $f(y^2x) = 2y f(x) - 1$

$f'(1) = 2$

find $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(1,1)}$

نشتق ونعوض

سد انا العلاقة

صفر

$$\Rightarrow f(y^2x) = 2y f(x) - 1$$

ضرب اقترانين

$$\Rightarrow f'(y^2x)\,(y^2 * 1 + x\,2yy') = 2y f'(x) + f(x)\,2y'$$

ضرب اقترانين

$$f'(1) * (1 + 2y') = 2f'(1) + f(1) * 2y'$$

$$2 * (1 + 2y') = 2 * 2 + 3 * 2y' \quad \div 2$$

$$1 + 2y' = 2 + 3y'$$

$$-2 \; -2y' \qquad -2 \; -2y'$$

$$y' = -1 \rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(1,1)}$$

Subject Date 25th Nov No.

Implicit differentiation اشتقاق ضمني *

① Find y' :

① $y = x^2 \longrightarrow y' = 2x$, $y = (f(x))^n$

② $y = 2^x \longrightarrow y' = 2^x \ln 2$, $y = b^{f(x)}$

③ $y = x^x \Rightarrow y = f(x)^{g(x)}$?

اذا نحط ln للطرفين

$\ln y = \ln x^x$

$\ln y = x \ln x$

نشتق ضرب اقترانين

$\frac{y'}{y} = x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x * 1$

برجعها لأصلها بالسؤال

$\Rightarrow \frac{y'}{y} = 1 + \ln x \Rightarrow y' = \boxed{y}(1 + \ln x)$

$y' = x^x(1 + \ln x)$

② $y = (x^2+1)^{\sin x}$, find y' ? $(f(x))^{g(x)}$ حالة

ln للطرفين

$\ln y = \ln (x^2+1)^{\sin x}$

$\ln y = \sin x \, (\ln(x^2+1))$ ضرب اقترانين

$\frac{y'}{y} = (\sin x) \frac{2x}{x^2+1} + (\ln(x^2+1))(\cos x)$

$y' = y\left(\left(\frac{2x \sin x}{x^2+1}\right) + \cos x \ln(x^2+1)\right)$

$y' = (x^2+1)^{\sin x}\left(\left(\frac{2x \sin x}{x^2+1}\right) + \ln(x^2+1)^{\cos x}\right)$

CRAFT NOTEBOOK

③ $x^y = y^x$, find y' ?

ln الطرفين

$\ln x^{y} = \ln y^{x}$

$\Rightarrow \underbrace{y \ln x}_{\text{ضرب اقترانين}} = x \ln y \xrightarrow{\text{نشتق}} y \ast \frac{1}{x} + \ln x \ast y' = x \ast \frac{y'}{y} + \ln y$

ننقل y' لنفس الطرف

$\ln x \, y' - \frac{x}{y} y' = \ln y - \frac{y}{x}$

$\Rightarrow y' \left(\ln x - \frac{x}{y} \right) = \ln y - \frac{y}{x}$

$$y' = \frac{\ln y - \frac{y}{x}}{\ln x - \frac{x}{y}}$$

④ $y = (x^3 - 2x)^{\ln x}$ find y'

$\ln y = \ln (x^3 - 2x)^{\ln x}$

$\ln y = \ln x \ln (x^3 - 2x)$

$\frac{y'}{y} = \ln x \ast \frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x} + \ln (x^3 - 2x) \frac{1}{x}$

$y' = y \left(\ln x \left(\frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x} \right) + \frac{\ln (x^3 - 2x)}{x} \right)$

$y' = (x^3 - 2x)^{\ln x} \left(\ln x \left(\frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x} \right) + \frac{\ln x^3 - 2x}{x} \right)$

Subject Date 28th .NOV No.

The Relationship between differentiability and Continuity: العلاقة بين الاتصال والاشتقاق

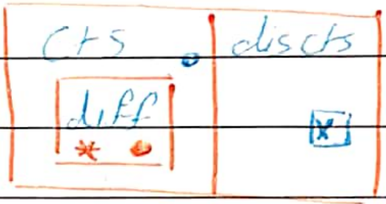
Theorem: If a function $f(x)$ is differentiable at c then f is continuous at c.

* إذا كان الاقتران قابل للاشتقاق عند نقطة إذاً يكون متصل عند تلك النقطة.

diff $\rightarrow$ cts

not cts $\rightarrow$ not diff

cts $\rightarrow$??



h discts $\longrightarrow$ not diff $\boxed{x}$

g cts $\rightarrow$ مش قابل
g cts $\rightarrow$ diff

S diff $\longrightarrow$ cts *

Ex: Is $f(x)$ differentiable at $x=1$?

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 1 \\ 2x, & x>1 \end{cases}$$

ما عندي مشكلة
كثير حدود قابل للاشتقاق
ومتصل لكن عندي
مشكلة عند (1) نقطة تشعب

$\lim\limits_{x\to 1^+} 2x = 2$

$\lim\limits_{x\to 1^-} x^2+1 = 2$

$f(1)=2$

f cts at $x=1$ $\rightarrow$ or diff / not diff

مشتقة

Subject Date 28^{th}. Nov No.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x , & x < 1 \\ 2 , & x > 1 \end{cases}$$

$f'_+(1) \overset{?}{=} f'_-(1)$

$2 = 2$

قبل ما أتأكد من قابلية الاشتقاق
ما رح أحط المساواة
إذا كان قابل للاشتقاق برجع
المساواة

$\therefore f(x)$ diff at $\boxed{x = 1}$

متصل وقابل للاشتقاق

Ex $f(x) = \begin{cases} x^2+2 , & x \le 1 \\ 2x , & x > 1 \end{cases}$ Is $f(x)$ diff at $x=1$?

$\lim_{x \to 1^+} 2x = 2$

$\lim_{x \to 1^-} x^2+2 = 3$

$f(1) = 3$

$f(x)$ disconts at $x=1$

$f(x)$ not diff at $x=1$

Ex $*f(x) = |x-5|$ is $f(x)$ diff at $x=5$?

*نعيد تعريف الاقتران

$f(x) = \begin{cases} x-5 , & x \ge 5 \\ 5-x , & x \le 5 \end{cases}$

$|x-5| \Rightarrow x-5=0$

$x=5$

$\overset{- - - -}{(5-x)}\ 5\ \overset{+ + +}{(x-5)}$

Subject Date 28^{th}, Nov No.

$$\lim_{x \to 5^+} \Rightarrow \underset{5-5}{x-5} = 0$$

$$\lim_{x \to 5^-} \Rightarrow \overset{5-x}{5-5} = 0$$

$$f(5) = 0$$

$f(x)$ cts at $x=5$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 \ , & x > 5 \\ -1 \ , & x < 5 \end{cases}$$

قاعدة مساواة لحد واشيرة. علم قابلية للاشتقاق

$$f'_+(5) \overset{?}{=} f'_-(5)$$

$$1 \neq -1$$

not diff at $x=5$

$f(x) = |x-5|$ not diff at $x=5$

دالة قابلة للاشتقاق عند باقي الاعداد.

diff $R - \{5\}$

$$* f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \ , & x \le 1 \\ kx - k \ , & x > 1 \end{cases}$$

find the value of k

(1) if $f(x)$ continuous?

(2) if $f(x)$ differentiable?

(3) if $f(x)$ cts but not diff?

CRAFT NOTEBOOK

Subject   Date 28^{th} .Nov   No.

① $\lim_{x \to 1^+} kx - k = \lim_{x \to 1^-} x^2 - 1$

الجواب

$0 = 0 \quad \forall \quad \boxed{k \in R} = (-\infty, \infty)$

أي عدد مكان k رح يخلي الاقتران cts

② $\lim_{x \to 1^+} = \lim_{x \to 1^-} = f(x)$ متصل ؛ لما الاقتران قابل للاشتقاق رح يكون

مباشرة ع المشتقة

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 1 \\ k, & x > 1 \end{cases}$$

$f'_+(1) = f'_-(1)$

$\boxed{k = 2}$ الجواب

③ : من شرط الفرعين ① و ②

يعني كل القيم باستثناء الأعداد الناتجة من الاشتقاق لأنه غير قابل للاشتقاق

$k \in \boxed{R - \{2\}}$

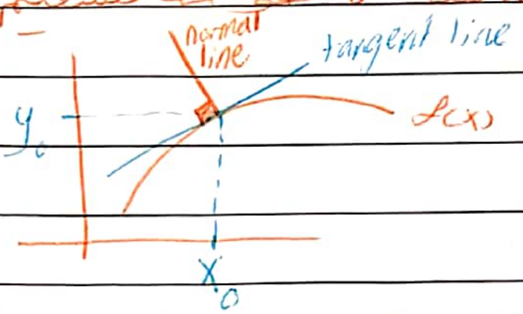
Subject Date 28th Nov No.

*Equation of tangent and normal lines:

→ Equation of tangent line →

معادلة المماس

* المماس: هو خط مستقيم يمس الاقتران في نقطة واحدة فقط



معادلة المماس = معادلة الخط المستقيم:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$m = \text{slope} = f'(x_0)$

→ Equation of normal line: (perpendicular to the tangent line)

معادلة العمودي على المماس

$$y - y_0 = \left(\frac{-1}{m}\right)(x - x_0)$$

{ إذا خطين متعامدين

$\boxed{m_1 * m_2 = -1}$

*(ex) → Find the slope of $f(x) = 2 + 3\tan^{-1} 2x$ at $x = 1$

لازم يعطيني نقطة أو يدل عليها

$f'(x) = 3\left(\frac{2}{1+(2x)^2}\right) = \frac{6}{1+4x^2}$

نشتق ونعوض بالنقطة

$f'(1) = \frac{6}{1+4} = \frac{6}{5}$ (Slope of $f(x)$ at $x=1$)

Subject Date 28^{th}. Nov No.

Find the slope of normal line of $f(x) = x^3$ at $x = -1$

$f'(x) = 3x^2$

$f'(-1) = 3$ (slope of tangent line)

Slope of normal line $= \frac{-1}{3}$

نشتق ونعوض
ونقلب الجواب
ونضرب بـ -1
لنطلع الـ normal line

* Find the equation of tangent line and normal line:

$f(x) = \frac{2}{1+e^{-x}}$ at $x = 0$

$x_0 \to 0$ من السؤال

$y_0 \to$ نعوض بالسؤال قيمة x_0

$y_0 = f(0) = \frac{2}{1+e^0} = 1$

أولاً: نجد (x_0, y_0)

$(0, 1)$

ثانياً: نجد الميل slope من المشتقة

(*) $m = \text{slope} = f'(x) = \frac{-2(-e^{-x})}{(1+e^{-x})^2} = \frac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

$f'(0) = \frac{2e^0}{(1+e^0)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ equation of tangent line $\Rightarrow$ $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 0)$

$\boxed{y = \frac{1}{2}x + 1}$

$\Rightarrow$ equation of normal line $\Rightarrow$ $y - 1 = -2(x - 0)$

$\boxed{y = -2x + 1}$

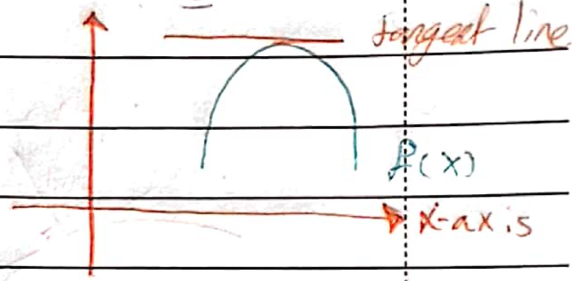
Subject

Date 28th . 10 No.

* For what value of x, the graph of $f(x) = 2x^3 - 6x$ have a horizontal tangent?

ماقيم X التي تجعل للمنحنى
لها مماس أفقي ؟

لما يكون موازي الـ X-axis



Slope = m = 0

$f'(x) = 0$

$f'(x) = 6x^2 - 6$

$6x^2 - 6 = 0$

$6x^2 = 6$

$x^2 = 1$

$\boxed{x = \pm 1}$

بتأكد إذا قيم X
تنتمي لمجال f(x)
طالما f(x) كثير حدود يعني
مجاله R

$\boxed{x = \pm 1} \in R$

* إذا كان هناك خطين متوازيين
m_1
m_2

$m_1 = m_2$

ميل الأول = ميل الثاني

* ميل X-axis = 0

$\therefore$ slope (tangent line) = 0

$\therefore$ at $x = \pm 1$ horizontal tangent لها مماسين أفقيين

Subject   Date 5^{th}-Dec No.

* Hyperbolic functions :

① Hyperbolic sine = $\sinh x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

② Hyperbolic cosine = $\cosh x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

تركيزي على أول 2 والباقي بتعرفوا منهم (العلاقات بيشبهوا نفس العلاقات بين الاقترانات المثلثية)

③ Hyperbolic tangent = $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$

④ Hyperbolic cotangent = $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$

⑤ Hyperbolic Secant = $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{e^{x} + e^{-x}}$

⑥ Hyperbolic cosecant = $\operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\sinh x} = \dfrac{2}{e^{x} - e^{-x}}$

Ex: ① $\sinh 0 = \dfrac{e^{0} - e^{0}}{2} = \dfrac{1-1}{2} = 0$ $\sinh x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

② $\cosh(\ln 3) = \dfrac{e^{\ln 3} + e^{-\ln 3}}{2}$ $\cosh x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

$= \dfrac{3 + \frac{1}{3}}{2} = \dfrac{\frac{9+1}{3}}{2} = \dfrac{10}{6}$

③ $\operatorname{sech}(\ln 3) = \dfrac{1}{\cosh(\ln 3)} = \dfrac{6}{10}$ $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$

④ $\sinh(\ln 5) = \dfrac{e^{\ln 5} - e^{-\ln 5}}{2} = \dfrac{5 - \frac{1}{5}}{2} \quad \dfrac{\frac{25-1}{5}}{2} = \dfrac{24}{10}$

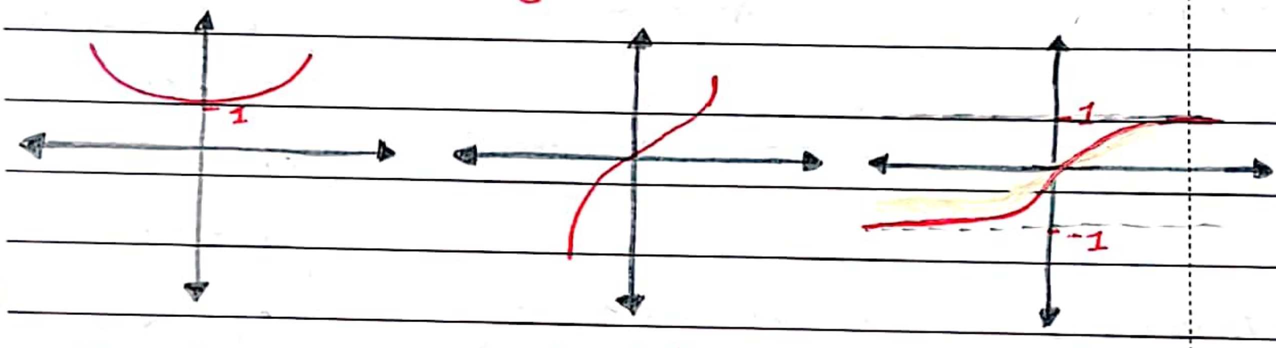
⑤ $\cosh(\ln 5) = \dfrac{e^{\ln 5} + e^{-\ln 5}}{2} = \dfrac{5 + \frac{1}{5}}{2} = \dfrac{\frac{25+1}{5}}{2} = \dfrac{26}{10}$

Subject   Date 5th-Dec   No.

⑥ $\tanh(\ln 5) = \dfrac{\sinh(\ln 5)}{\cosh(\ln 5)} = \dfrac{\frac{24}{10}}{\frac{26}{10}} = \dfrac{24}{26}$

⑦ $\operatorname{csch}(\ln 5) = \dfrac{1}{\sinh(\ln 5)} = \dfrac{10}{24}$

* Graphs of hyperbolic functions :



$y = \cosh x$ $y = \sinh x$ $y = \tanh x$

$\cosh x : \mathbb{R} \to [1, \infty)$ $\sinh x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\tanh x : \mathbb{R} \to (-1, 1)$

قيم coshx دائماً
تكون موجبة 1<

قيم tanhx و sinhx إما سالبة أو موجبة
(يعتمد على x إذا كانت ← سالبة تكون صورتها سالبة
موجبة تكون صورتها موجبة)

* odd , even :

$\cosh x \longrightarrow$ symmetric about the y-axis (even function)
$\therefore \cosh(-x) = \cosh x$

$\sinh x \longrightarrow$ symmetric about the origin (odd function)
$\therefore \sinh(-x) = -\sinh x$

$\tanh x \longrightarrow$ ① $\dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{odd}{even} =$ odd function $\therefore \tanh(-x) = -\tanh x$
أو
② symmetric about the origin = odd function

Subject Date 5th Dec No.

*limits : من الرسمات

$\lim_{x \to +\infty} \cosh x = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} \cosh x = +\infty$

* قيم x تزداد بدون توقف
∴ الصور تزداد دون توقف

* قيم x تتناقص دون توقف
∴ الصور تزداد دون توقف

{ cosh x :
*No horizontal asymptotes.
*No vertical asy.

$\lim_{x \to +\infty} \sinh x = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} \sinh x = -\infty$

* قيم x تزداد دون توقف
∴ الصور تزداد دون توقف

* قيم x تتناقص دون توقف
∴ الصور تتناقص دون توقف

{ sinh x :
*No horizontal asymptotes
*No vertical asymptotes

$\lim_{x \to +\infty} \tanh x = 1$, $\lim_{x \to -\infty} \tanh x = -1$

* قيم x تزداد دون توقف
∴ الصور تقترب من ال $y = 1$

* قيم x تتناقص دون توقف
∴ الصور تقترب من ال $y = -1$

{ tanh x :
{ $y = 1$ / $y = -1$ }
↳ horizontal asy.
*No vertical asy.

Subject Date: 7th Dec No.

* Hyperbolic Identities : المتطابقات

* بتشبه متطابقات الـ trigonometric functions.

* $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
* $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$
* $\sinh x + \cosh x = e^{x}$
* $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$
* $\sinh(x+y) = \sinh x * \cosh y + \cosh x * \sinh y$
* $\cosh(x+y) = \cosh x * \cosh y + \sinh x * \sinh y$
* $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

Ex Find the value of x ?

(متطابقة)

① $\underbrace{\cosh x + \sinh x}_{} = 4$

$e^{x} = 4 \longrightarrow$ ln للطرفين

$x = \ln 4 = 2 \ln 2$

* لو كنت ناسية المتطابقة (برجع كل اقتران لقيمته)

$\dfrac{e^{x} + \cancel{e^{-x}}}{2} + \dfrac{e^{x} - \cancel{e^{-x}}}{2} = 4$

$\dfrac{2e^{x}}{2} = 4 \rightarrow e^{x} = 4 \overset{(\ln)}{\Rightarrow} x = \ln 4 = 2\ln 2$

(متطابقة)

② $\underbrace{\cosh x - \sinh x}_{} = \frac{1}{3}$

$e^{-x} = \frac{1}{3} \overset{(\ln)}{\Longrightarrow} -x = \ln \frac{1}{3} \rightarrow x = -\ln \frac{1}{3} = \ln 3$

③ $\sinh x = \dfrac{e^{x}}{2} - 3 \leadsto$ (مافي اي متطابقة يعني رح ارجع sinhx لقيمته)

$\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \dfrac{e^{x}}{2} - 3$

$\Rightarrow \dfrac{\cancel{e^{x}} - e^{-x}}{2} - \dfrac{\cancel{e^{x}}}{2} = -3 \leadsto -\dfrac{e^{-x}}{\cancel{2}} = \cancel{-}3 \quad e^{-x} = 6 \overset{(\ln)}{\Rightarrow} -x = \ln 6$

$\Rightarrow x = \ln \frac{1}{6}$

Subject   Date 7^{th} - Dec No.

$*$Ex : If $\sinh x = \frac{1}{2}$, find $\cosh x$?

باستخدام المتطابقة الأولى :

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\cosh^2 x - (\frac{1}{2})^2 = 1$

$\cosh^2 x = 1 + \frac{1}{4}$

$\cos^2 x = \frac{5}{4} \longrightarrow \cosh x = \pm\sqrt{\frac{5}{4}} \longrightarrow \frac{\sqrt{5}}{2}$

$[1,\infty)$: Range لأنه دائماً قيمها موجبة

∴ رح نأخذ الموجبة .

* Derivative of hyperbolic functions :

$\rightarrow \frac{d}{dx}(\sinh x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \cosh x$

* $\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$
* $\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$
* $\frac{d}{dx} \tanh x = \operatorname{sech}^2 x$
* $\frac{d}{dx} \operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x$
* $\frac{d}{dx} \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$
* $\frac{d}{dx} \coth x = -\operatorname{csch}^2 x$

بتشبهوا اشتقاق الاقترانات المثلثية لكن باختلاف الإشارة .

جميعهم إشارة سالبة

Subject Date 7^{th}-Dec No.

Ex find y' ?

① $y = x\sinh x$ ضرب اقترانين

$y' = x\cosh x + \sinh x$

② $y = \cosh(\ln x)$

$y' = \sinh(\ln x) * \frac{1}{x} = \frac{e^{\ln x} - e^{-\ln x}}{2} * \frac{1}{x} = \frac{x - \frac{1}{x}}{2} * \frac{1}{x} = \frac{\frac{x^2-1}{x}}{2x}$

$= \frac{x^2-1}{2x^2}$

③ $y = \ln(\tanh x)$

$y' = \frac{\operatorname{sech}^2 x}{\tanh x} = \frac{1 * \cancel{\cosh x}}{\cancel{\cosh^2 x} * \sinh x} = \frac{1}{\cosh x \sinh x} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sinh 2x} = \frac{2}{\sinh 2x}$

$= 2\csc 2x$

④ $y = 3^{\coth x}$

$y' = 3^{\coth x} * (-\operatorname{csch}^2 x)\ln 3$

Subject Date 9th Dec No.

Critical numbers : القيم الحرجة

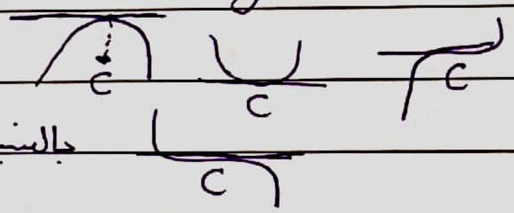
من تطبيقات الاشتقاق.

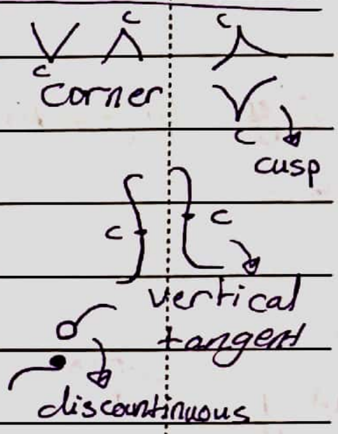
Def: A critical number of a function f is a number c in the domain of f.

$c \in D_f$ يعني النقطة موجودة بالمجال

Such that either $f'(c) = 0$ or $f'(c)$ does not exist

horizontal tangent





بالنسبة للcurve بيكون اسمها critical point

---

ex: Find the critical numbers:

① $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$

لأنه poly فال Domain :

$D_f = \mathbb{R}$

* نحسب ال Domain
* نشتق
* نساوي المشتقة بالصفر
* نتأكد من النقاط انها تنتمي للDomain

$\Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$

$f'(x) = 0 \rightarrow 6x^2 - 6x - 36 = 0 \quad \div 6$

$x^2 - x - 6 = 0$

$(x+2)(x-3) = 0$

$\{-2, 3\}$

critical numbers $\boxed{x = -2 \quad x = 3}$ → $D_f = \mathbb{R}$

critical points: $(-2, f(-2))$, $(3, f(3))$ إذا عادي نشملها

Note $f'(x)$ dne X لأنه polynomial ماعنده نقاط غير معرفة (غير موجودة)

Subject   Date 9th Dec No.

② $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$ {Rational number}

$x^2-1=0 \rightarrow x=\pm 1 \quad D_f = R-\{1,-1\}$

$f'(x) = \dfrac{(x^2-1)(2x) - x^2(2x)}{(x^2-1)^2}$

$= \dfrac{\cancel{2x^3} - 2x - \cancel{2x^3}}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2} \rightarrow f'(x)$

$\Rightarrow f'(x) = 0$ (أصفار البسط)

$-2x = 0 \qquad x = 0 \rightarrow 0 \in D_f$ ✓

$\Rightarrow f'(x)$ d.n.e (أصفار المقام)

$(x^2-1)^2 = 0 \qquad x = \pm 1 \rightarrow \pm 1 \notin D_f$ ✗

Critical number $x=0$

Critical point $(0, f(0))$

③ $f(x) = 4x^{3/5} - x^{8/5}$ بما انه الجذر الخامس معناها ماعندي مشكلة بانه يكون في سالب تحت الجذر

$\therefore D_f = R$

$f'(x) = 4 * \frac{3}{5}(x)^{-2/5} - \frac{8}{5}x^{3/5}$

$= \dfrac{12}{5x^{2/5}} - \dfrac{8x^{3/5} * x^{2/5}}{5 * x^{2/5}} \rightarrow$ توحيد مقام $\rightarrow \dfrac{12 - 8x}{5x^{2/5}} = f'(x)$

$x^{3/5} * x^{2/5} = x^{5/5} = x$

$f'(x) = 0$

$12 - 8x = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{12}{8} \in D_f}$

$\boxed{x = \frac{12}{8}}$

$f'(x)$ d.n.e

$5x^{2/5} = 0$

$\boxed{x=0} \in D_f$

* critical numbers $\{\frac{12}{8}, 0\}$
* critical points $(0, f(0)), (\frac{12}{8}, f(\frac{12}{8}))$

CRAFT NOTEBOOK

Subject Date 9^{th}. Dec No.

4) $f(x) = |3x-6|$ $D_f = R$

* نعيد التعريف :

$3x-6=0 \rightarrow x=2$

$(6-3x)$ --- 2 +++ $(3x-6)$

$$f(x) = \begin{cases} 3x-6, & x \geq 2 \\ 6-3x, & x < 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3, & x > 2 \\ -3, & x < 2 \end{cases}$$

$f'(x) = 0$

$3 = 0$ ✗

$-3 = 0$ ✗

$f'(x)$ d.n.e (نقاط التشعب)

$f'_+(2) = 3$

$f'_-(2) = -3$ ≠

critical number $x = 2$

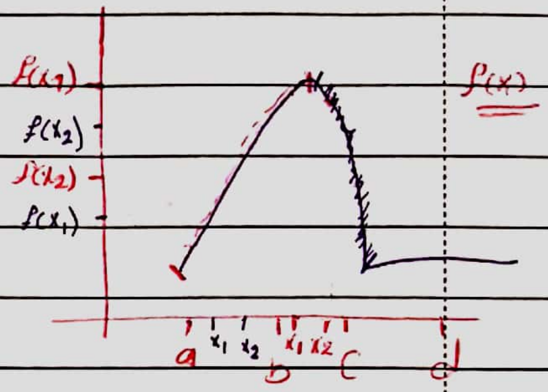
critical point $(2, f(2))$

Subject   Date 9^{th} Dec No.

Increasing & Decreasing functions.

احسن توضيح الاشتقاق

The shape of the function on the interval			Test
↑	Increasing	$x_2 > x_1$, $f(x_2) > f(x_1)$	$f'(x) > 0$
↓	decreasing	$x_2 > x_1$, $f(x_2) < f(x_1)$	$f'(x) < 0$
—	constant	$f(x_1) = f(x_2)$ for all x_1, x_2	$f'(x) = 0$



Inc (a,b) ⟶ التزايد يعني كل

ما زدت العدد تزداد صورته

$x_2 > x_1 \rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

⊀ علاقة التزايد بالاشتقاق : إذا حسبت

الميل عند أي نقطة في هذه الفترة

الميل سيكون موجب

dec (b,c) ⟶ التناقص يعني

كل ما زاد العدد تتناقص صورته

⊀ علاقته بالاشتقاق : إذا حسبت

الميل عند أي نقطة بالفترة

الميل سيكون سالب

const (c,d) ⟶ الثابت يعني

جميع النقاط في فترة الثابت

صورهم متساوية

⊀ علاقته بالاشتقاق : الميل

عند أي نقطة بالفترة = 0

* تكتب الفترات مفتوحة

---

* لحساب فترات التزايد والتناقص نقوم

بفحص إشارة المشتقة.

ex : find the intervals of Increase or decrease ?

① $f(x) = x e^{-x}$ → $D_f = \mathbb{R}$

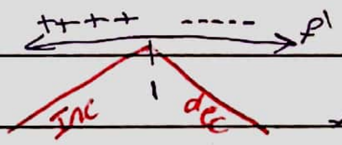
$f'(x) = x(-e^{-x}) + e^{-x} * 1$

$f'(x) = e^{-x}(-x+1)$

$f'(x) = 0 \rightarrow e^{-x}(-x+1) \Rightarrow e^{-x} = 0$ X

critical $-x+1=0$ $\boxed{x=1}$

$f'(x)$ d.n.e X ماعندي



عدد أصغر من (1) :

$x = 0$

$f'(0) = 1$

عدد أكبر من (1) :

$x = 2$

$f'(2) = e^{-2}(-1)$

أي عدد مضروب بالسالب أكيد سالب .

* Inc $(-\infty, 1)$

* dec $(1, \infty)$

Subject Date 9th Dec No.

② $f(x) = x + 2\sin x \quad , \quad x \in [0, 2\pi]$

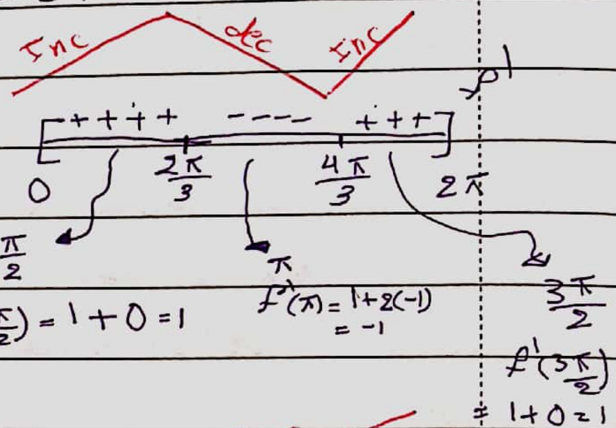
$f'(x) = 1 + 2\cos x$ حددلي فترة معناها ارح

$f'(x) = 0$ أبحث بالDomain مباشرة

أحل

$1 + 2\cos x = 0$

$\cos x = \frac{-1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \in [0, 2\pi]$ *critical numbers*

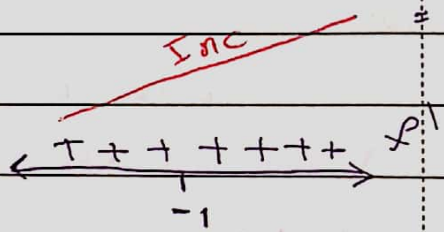


Inc $(0, \frac{2\pi}{3}), (\frac{4\pi}{3}, 2\pi)$

dec $(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$.

③ $f(x) = (x+1)^5$

$D_f = \mathbb{R}$



$f'(x) = 5(x+1)^4 (1)$

$f'(x) = 0$ لأنه مشتقة أس (4)

$5(x+1)^4 = 0 \rightarrow x + 1 = 0 \quad \boxed{x = -1}$ critical يعني موجب يعني شو ما كانت القيم رح يطلع دائماً +

وكونه موجب وموجب فيكون

Inc $(-\infty, \infty)$ موجب من برا.

④ ~~$f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x+4)$~~

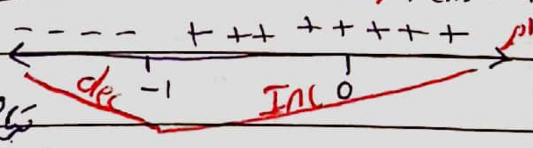
$D_f = \mathbb{R} \longrightarrow f'(x) = x^{\frac{1}{3}}(1) + (x+4) * \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$

$f'(x) = x^{\frac{1}{3}} + \frac{x+4}{3x^{\frac{2}{3}}}$ توحيد مقامات $\frac{3x + x + 4}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{4x+4}{3x^{\frac{2}{3}}}$

$f'(x) = \frac{4x+4}{\boxed{3x^{\frac{2}{3}}}}$ → $f'(x) = 0 \rightarrow 4x + 4 = 0 \rightarrow \boxed{x = -1}$ critical $(\in D_f)$

→ $f'(x)$ d.n.e $\rightarrow 3x^{\frac{2}{3}} = 0 \rightarrow \boxed{x = 0}$

المقام دائماً (+) لأنه تربيع موجب وبعدين جذر تكعيبي موجب وموضوع من برا بعد موجب فالتحكم في الاشارة البسط



Inc $(-1, \infty)$

dec $(-\infty, -1)$

Subject Date 12th. Dec No.

Extreme values القيم القصوى

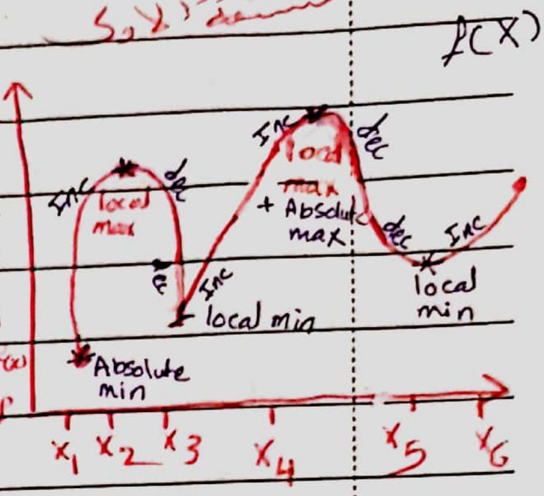
تطبيقات المشتقة الأولى

① * maximum ② * minimum

maximum		minimum	
local (relative)	Absolute (global)	local (relative)	absolute (global)
$f(c) \geq f(x)$ $\forall x$ near to c	$f(c) \geq f(x)$ $\forall x \in D_f$	$f(c) \leq f(x)$ $\forall x$ near to c	$f(c) \leq f(x)$ $\forall x \in D_f$

f': + + + | − − −

f': − − | + +



Thm: If f has a local max or min at c, then c is a critical number of $f(x)$.

x_2: $f' = 0$ x_3: $f' \to$ d.n.e

x_4: $f' = 0$

x_5: $f' = 0$

critical numbers

* ممكن تكون critical لكن ليست local max / min.

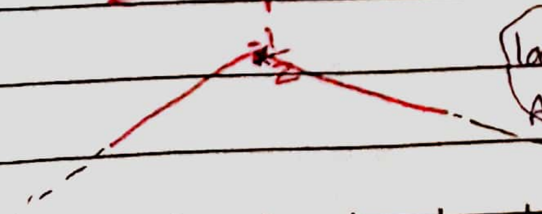
* ex: ⓐ find the local max and min values:

ⓑ find the Absolute max and min values:

① $f(x) = -x^2 - x - 2$

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$ $\Rightarrow f'(x) = -2x - 1 \Rightarrow -2x - 1 = 0$ $\boxed{x = \frac{-1}{2}}$ critical

f': + + + + + | − − − −



local max at $x = -\frac{1}{2}$

Absolute max at $x = -\frac{1}{2}$

local, Absolute value $\to f(-\frac{1}{2})$

Subject Date| 2 th. Dec No.

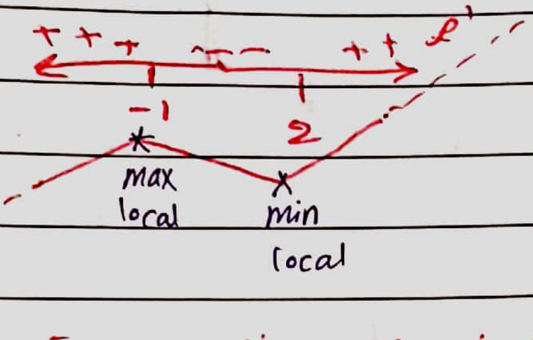
② $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ $\quad |D_f = \mathbb{R}|$

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \quad \div 6$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x+1)(x-2) = 0 \qquad \boxed{x=-1} \,/\, \boxed{x=2} \in D_f$

critical numbers



at $x=-1$ local max value $f(-1)$

at $x=2$ local min value $f(2)$

No Absolute val.:

← لأنه الاقتران بضل مستمر للسما فما بحصل ع رقم
وبضل ينزل للسما فما بحصل على رقم

③ $f(x) = (2x-1)^3$ $\quad |D_f = \mathbb{R}|$

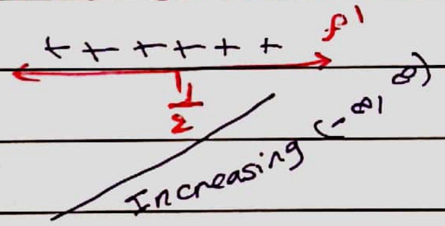
مضروبا بموجب

القوس تربيع (+)

$f'(x) = 3(2x-1)^2 * 2 = 0 \rightarrow 6(2x-1)^2 = 0$

$2x - 1 = 0$

$\boxed{x = \frac{1}{2}}$ critical

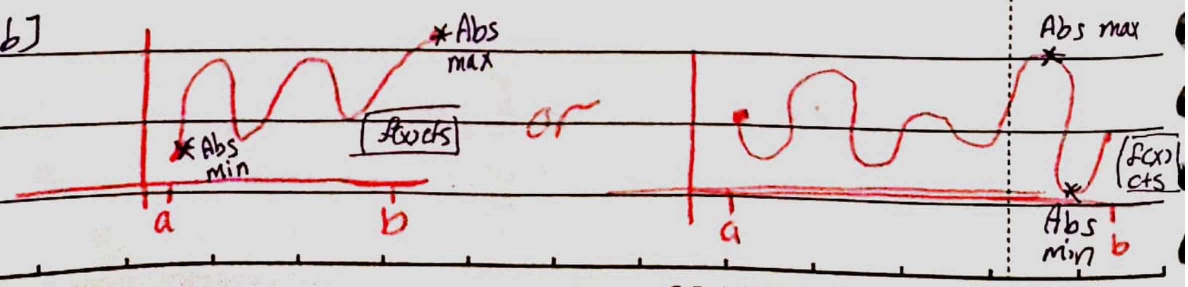


وليست extreme

No extreme values

Thm: (The extreme value Thm):

If a function f is cts on a closed Interval $[a,b]$ Then f has both an absolute max and absolute min on $[a,b]$



Subject   Date 12th Dec No.

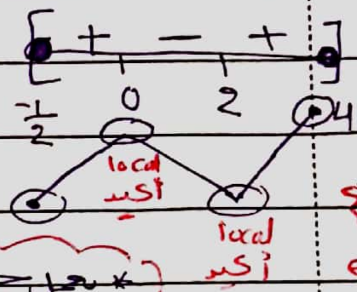
*** ex :** $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \quad [-\frac{1}{2}, 4]$

$f'(x) = 3x^2 - 3 * 2x$

$3x^2 - 6x = 0$

$3x(x-2) = 0$

$\boxed{x = 0 ,\ x = 2} \in [-\frac{1}{2}, 4]$ critical



$\{-\frac{1}{2}, 4\}$ end points

* بعمل جدولا وبحط فيه
النقاط اللي شاكك إنها
max, min
وبوضحها عن طريق
الصور تبعتهم

	x	$f(x)$	
min	$-\frac{1}{2}$	$f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$	nothing
	2	$f(2) = -3$	local min, Absolute min
max	0	$f(0) = 1$	local max
	4	$f(4) = 17$	Absolute max value

الرقم الأكبر هو ال Absolute max

الرقم الأصغر هو ال Absolute min.

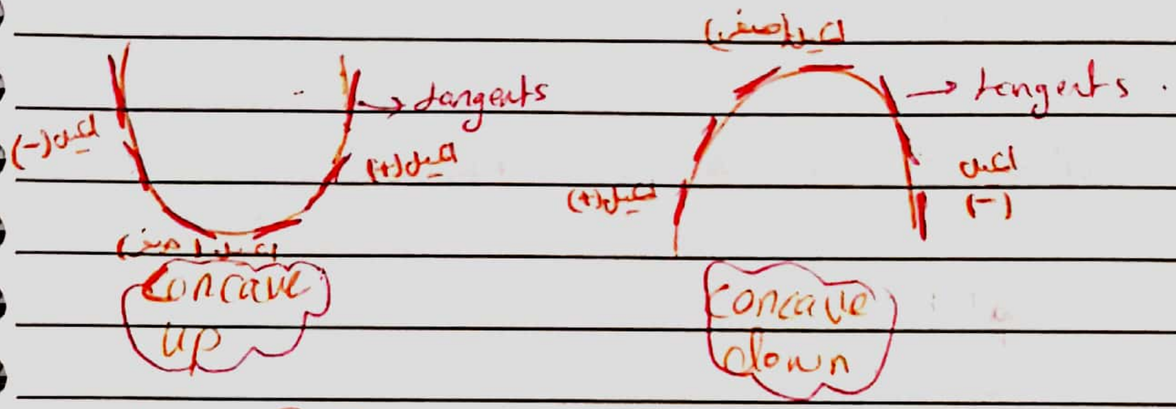
Scanned with CamScanner

Subject Date 14th, Dec No.

Concavity : التقعر * من تطبيقات المشتقة الثانية

→ concave up : The graph of (f) lies above all of its tangents on the Interval.

→ concave down : The graph of (f) lies below all of its tangents on the Interval.



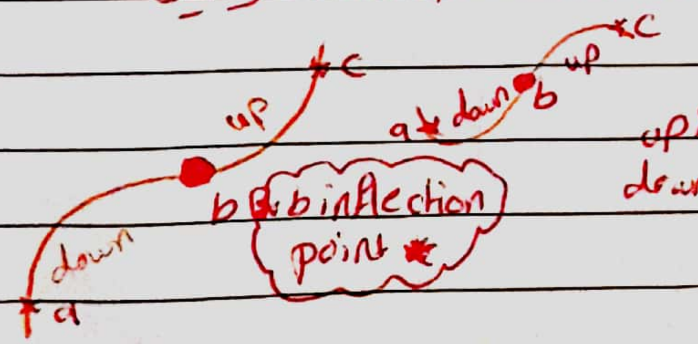
* قيمة ال slope	* قيمة slope
متزايد - $slope = f'(x)$	$slope = f'(x)$ متناقصة
$f'(x)$ Inc	$f'(x)$ dec
$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$

Def: A point p on the curve $y = f(x)$ is called (Inflection point) نقطة الانعطاف if f is continuous there and the curve changes the direction of its concavity at p.

* يعني عشان تعين نقطة انعطاف لازم تتحقق شرطين:

① تكون continuous

② تغير الاتجاه من up to down أو down to up



Subject Date 14^{th}, Dec No.

Ex : ⓐ Find the Intervals of concavity :
ⓑ Find the Inflection points :

① $f(x) = x^4 - 4x^3$, $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$

$f''(x) = 12x^2 - 24x = 0$

$12x^2 - 24x = 0 \rightarrow 12x(x-2) = 0$

$\boxed{x = 0 \ , \ x = 2} \in D_f$

f'': + + + (0) − − − (2) + +

up 0 down 2 up

Concave up $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$

Concave down $(0, 2)$

The points $(0, f(0))$, $(2, f(2))$ are inflection points

② $f(x) = x^2 - x - \ln x$ $D_f \ (0, \infty)$

$f'(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x}$

$f''(x) = 2 - \left(\frac{-1}{x^2}\right) = 2 + \frac{1}{x^2} = \boxed{\frac{2x^2+1}{x^2}}$ $f''(x)$

$2x^2 + 1 = 0 \rightarrow 2x^2 = -1$ ✗

$x^2 = 0$ $x = 0 \notin D_f$

فاعندي أرقام إذاً بروح أحط
أي عدد ع خط الأعداد مشان
أفحص الإشارة.

f'': [+ + + + + (from 0)

0 up

No inflection points
concave up
$(0, \infty)$

CRAFT NOTEBOOK

Subject Date 14th Dec No.

③ $f(x) = -(x+5)^4$, $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = -4(x+5)^3$

$\boxed{f''(x) = -12\,(x+5)^2}$ $\quad -12(x+5)^2 = 0$

$(-) \qquad (+)$ $\quad x+5=0 \Rightarrow \boxed{x=-5}$

دائماً الإشارة
سالبة لأنه
القوس إشارته
موجب وضربته
بسالب

$-5 \rightarrow$ (Not Inflection) Concave down

down

No Inflection points

Subject Date 19th. Dec No.

L'Hopital Rule :

If f, g differentiable on an open Interval contains a

and $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$ or $\dfrac{\infty}{\infty}$, Then

$\dfrac{-\infty}{+\infty}$ $\dfrac{\infty}{-\infty}$ $\dfrac{+\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

بقدر أستخدمها

حتى لو : $x \to a^+$

$x \to a^-$

$x \to +\infty$

$x \to -\infty$

بالتعويض المباشر

Ex: ① $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \sin x}{\cos x} = \dfrac{1-1}{0} = \dfrac{0}{0}$

$\xrightarrow{L'H} \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{-\sin x} = \dfrac{0}{1} = 0$

② $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x^3} = \dfrac{e^0 - 1}{0^3} = \dfrac{0}{0}$

$\xrightarrow{L'H} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x}{3x^2} = \dfrac{1}{0} = +\infty$

③ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = \dfrac{\infty}{\infty}$

$\xrightarrow{L'H} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{e^x} = \dfrac{+\infty}{+\infty} \xrightarrow{L'H} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{e^x} = \dfrac{2}{+\infty} = 0$

لو ما زبطت من أول مرة

برجع نعيدها

④ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{-\frac{4}{3}}}{\sin(\frac{1}{x})} = \dfrac{\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}}{\sin 0} = \dfrac{0}{0}$

$\dfrac{1}{x^{\frac{4}{3}}} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

نزلتها لعند المقام

$\xrightarrow{L'H} \lim \dfrac{+\frac{4}{3} x^{-\frac{7}{3}}}{(\cos \frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})} = \dfrac{4 x^{-\frac{1}{3}}}{3 \cos \frac{1}{x}} \xrightarrow{L'H} \dfrac{4}{3(+\infty)(\cos 0)} = \dfrac{4}{\infty} = 0$

Subject Date 19^{th}. Dec No.

⑤ $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\csc x} = \frac{-\infty}{+\infty} \xrightarrow{L'H} \lim \frac{\frac{1}{x}}{-\csc x\cdot\cot x}$

$= \lim\limits_{x\to0^+} \frac{-1}{x\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}}$

$= \lim \frac{-\sin^2 x}{x\cos x} = \frac{0}{0}$

$\xrightarrow{L'H} \frac{-2\sin x\cos x}{-x\sin x+\cos x} = \frac{-2(0)(1)}{0+1}$

$= \frac{0}{1} = 0$ ✗✗

---

*Using L'Hopital Rule for Indeterminate form:

$0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty$

$\boxed{0\cdot\infty}$: Ex : ① $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x$ تعويض مباشر $\Rightarrow 0\cdot-\infty$

طريقة اولى $\Rightarrow f\cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$ ← الاقتران الاسهل بنزله عالمقام

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{+\infty}$ L'H

$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to0^+} -x = 0$

② $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (1-\tan x)\sec 2x \Rightarrow (1-1)\sec\frac{\pi}{2} = 0\cdot\infty$ تعويض مباشر

$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan x}{\cos 2x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{L'H} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{+\sec^2 x}{+\sin 2x(2)} = \frac{\sec^2(\frac{\pi}{4})}{2\sin 2(\frac{\pi}{4})}$

$= \frac{(\sqrt{2})^2}{2(1)} = 1$

③ $\lim_{x \to +\infty} x \sin\frac{\pi}{x} \Rightarrow \boxed{\infty \cdot 0}$

مشتقة الزاوية (الاقتران) التابع

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{L'H} \lim_{x \to +\infty} \frac{(\cos\frac{\pi}{x})(+\frac{\pi}{\cancel{x^2}})}{\frac{+1}{\cancel{x^2}}}$

$= \lim_{x \to +\infty} \pi \cos\frac{\pi}{x} = \pi$

④ $\boxed{\infty - \infty}$

Ex: ① $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \infty - \infty$ ∇

طريقة الحل توحيد مقامات

$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{L'H} \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - 1}{x\cos x + \sin x}$

$= \frac{1-1}{0+0}$ $\frac{0}{0} \xrightarrow{L'H}$ كمان مرة

$\lim_{x \to 0^+} \frac{-\sin x}{-x\sin x + \cos x + \cos x} = \frac{0}{0+1+1} = 0$

② $\lim_{x \to +\infty} \boxed{x} - \ln(x^2+1)$ $\infty - \infty$ ∇

رح اكتبها بطريقة ثانية (بحيث تناسب اللي بعدها)

$\lim_{x \to +\infty} \boxed{\ln e^x} - \ln(x^2+1)$

من خصائص ln الطرح يتحول لقسمة

$= \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{e^x}{x^2+1}\right) = \ln\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2+1}\right)$

بالتعويض المباشر $\frac{\infty}{\infty}$

اقتران متصل ابقدر آخذ النهاية جوا القوس

$\xrightarrow{L'H} \ln\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x}\right)$ → $\frac{\infty}{\infty}$ بالتعويض المباشر

$= \ln\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2}\right) - \ln{+\infty} = +\infty$

Subject Date 21th. Dec No.

* $0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty$:

Ex ① $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \infty^0$ بالتعويض المباشر

الحل $\to y = x^{\frac{1}{x}}$ ① نحط ln للطرفين

$\ln y = \frac{1}{x}\ln x \Rightarrow \ln y = \frac{\ln x}{x}$ ② نحط lim للطرفين

$\lim_{x\to+\infty} \ln y = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \to \frac{+\infty}{\infty}$ $\boxed{L'H}$ ③ نطبق لوبيتال لطرف ال x

(ثابت لانه ما فيه x)

$\ln y = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}$

$\ln y = 0$ ④ نحط e للطرفين

$= e^{\ln y} = e^0$

$y = 1$

$\therefore \lim_{x\to\infty^+} x^{\frac{1}{x}} = 1$

* هاي الخطوات لهدر أطبقها على الـ ٣ حالات : $0^0, \infty^0, 1^\infty$

② $\lim_{x\to+\infty} (e^x+x)^{\frac{1}{x}}$ تعويض مباشر ∞^0

الحل $\to y = (e^x+x)^{\frac{1}{x}}$

$\ln y = \frac{1}{x}\ln(e^x+x)$

$\ln y = \frac{\ln(e^x+x)}{x}$

$\lim_{x\to+\infty} \ln y = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x+x)}{x} \to \frac{\infty}{\infty}\ (L'H)$

$\to \ln y = \lim \frac{e^x+1}{e^x+x} \to \frac{\infty}{\infty}$ L'H كمان مرة

$\ln y = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+1} \to \frac{\infty}{\infty}$ L'H كمان مرة

$\ln y = \lim_{x\to} \frac{e^x}{e^x} = 1$

$\ln y = 1$ $\boxed{y = e^1}$

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} (e^x+x)^{\frac{1}{x}} = e}$

*قاعدتين بسهلوا اكل lim عن هاد النوع :

$$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{b}{x}} = e^{ab} \quad , \quad \lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}$$

بالتعويض المباشر 1^{∞} ، بالتعويض المباشر 1^{∞}

Ex: ① $\lim_{x\to +\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x}$ ⇒ نفس النوع الثاني $= 1^{\infty}$ بالتعويض المباشر

$e^{(ab)} = e^{(-3)(2)} = e^{-6}$.

② $\lim_{x\to 0}(1-8x)^{\frac{2}{x}}$ نفس النوع الاول $= 1^{\infty}$ بالتعويض المباشر

$e^{ab} = e^{(-8)(2)} = e^{-16}$

③ $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^{-3x}$ تعويض مباشر 1^{∞} لكن شكلها ما شبه القواعد السهلة

الحل ← نقدر عليها حتى أقدر استخدم القاعدتين

$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{3x}$ (نقلب البسط والمقام) $= \lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$ (نوزع المقام) صارت زي القاعدة الثانية

$\to e^{ab} = e^{6}$

④ $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x-3}{x-2}\right)^{x} \to 1^{\infty}$

x عامل مشترك

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\cancel{x}(1-\frac{3}{x})}{\cancel{x}(1-\frac{2}{x})}\right)^{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\left(1-\frac{3}{x}\right)^{x}}{\left(1-\frac{2}{x}\right)^{x}} = \frac{e^{-3}}{e^{-2}} = e^{-3+2} = e^{-1}$$

Subject Date 26th. Dec No.

Indefinite Integral التكامل غير المحدود .

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C \quad , \ c \text{ is constant}$$

$f'(x)$

* قواعد لحل التكامل المحدود (بتعتمد قواعد الاشتقاق):

① $\int k\,dx = kx + C$

↳ $\int 5\,dx = 5x + C$

② $\int x^{n}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq 1$

↳ $\int x^{7}\,dx = \frac{x^{8}}{8} + C$

③ $\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + C$

④ $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

⑤ $\int k f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$

↳ $\int x^{2} - 5x^{3} + x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{3}}{3} - 5\frac{x^{4}}{4} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$

بشرط يكون خطي

⑥ $\int e^{\boxed{ax+b}}\,dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + C$

↳ $\int e^{7x}\,dx = \frac{e^{7x}}{7} + C$

شرط خطي

⑦ $\int b^{\boxed{ax+k}}\,dx = \frac{b^{ax+k}}{a \ln b} + C$

↳ $\int 10^{3x+5}\,dx = \frac{10^{3x+5}}{3\ln 10} + C$

Subject Date 26^{th} Dec No.

⑧ $\int (ax+b)^n \, dx = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)\,a} + C$

شرط خطي

$\int (2x-7)^{10} \, dx = \dfrac{(2x-7)^{11}}{(11)(2)} + C$

ex: $\int (4+x^2)^2 \, dx = \int 16 + 8x^2 + x^4 \, dx$

مش خطي (نفك التربيع 2)

$= 16x + \dfrac{8x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + C$

(تربيع 2 أو أكثر)

ex: $\int \dfrac{x^3 - 2\sqrt{x}}{x} \, dx = \int \dfrac{x^3}{x} - \dfrac{2\sqrt{x}}{x} \, dx = \int x^2 - 2x^{-\frac{1}{2}} \, dx$

$(x^{\frac{1}{2}})$

ما عندي قواعد تقسيم

(رح أوزع المقام)

$= \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{2x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$

⑨ $\int \dfrac{g'(x)}{g(x)} \, dx = \ln|g(x)| + C$

$\int \dfrac{1}{x+5} \, dx = \ln|x+5| + C$

$(x+5)' = 1$

(البسط مشتقة المقام)

ex: $\frac{1}{2} \int \dfrac{2x}{x^2+5} \, dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+5| + C$

$(x^2+5)' = 2x$

نضرب ونقسم على 2 بسط

(لأن لازم احصل على مشتقة المقام)

Subject Date 26^{th} · Dec No.

Trigonometric functions :

كل الزوايا ذات الاقترانات المثلثية لازم تكون خطية عند التكامل

[1] $\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} + c$

$\int \cos(1-7x)\,dx = \frac{\sin(1-7x)}{-7} + c$

[2] $\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{\cos(ax+b)}{a} + c$

$\int \sin(5x+2)\,dx = -\frac{\cos(5x+2)}{5} + c$

[3] $\int \sec^2(ax+b)\,dx = \frac{\tan(ax+b)}{a} + c$

$\int \sec^2 3x\,dx = \frac{\tan(3x)}{3} + c$

[4] $\int \csc^2(ax+b)\,dx = -\frac{\cot(ax+b)}{a} + c$

$\int \csc^2(1-x)\,dx = -\frac{\cot(1-x)}{-1} + c$

[5] $\int \sec(\underline{ax+b})\tan(\underline{ax+b})\,dx = \frac{\sec(ax+b)}{a} + c$

$\int \sec(10x)\tan(10x)\,dx = \frac{\sec 10x}{10} + c$

[6] $\int \csc(ax+b)\cot(ax+b)\,dx = -\frac{\csc(ax+b)}{a} + c$

$\int \csc 2x \cot 2x\,dx = -\frac{\csc 2x}{2} + c$

Ex: 1. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx \xrightarrow{\text{فك التربيع}} \int \frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}\,dx \rightarrow \int \tan x \sec x\,dx$

$= \sec x + c$

2. $\int \cos^2 x\,dx \xrightarrow{\text{متطابقة}} \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx$

$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + c$

Subject Date 26^{th} - Dec No.

3. $\int \tan x \, dx \xrightarrow{\text{نفك } \tan} -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln|\cos x| + c$

$= \ln|\sec x| + c$

$(\cos x)' = -\sin x$

نضرب ونقسم بالسالب (عشان أحصل على مشتقة المقام في البسط).

Subject Date 28^{th} Dec No.

Indefinite Integral :

علاقة مثال التكامل ←

$\circledast \int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2 - (f(x))^2}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$, a constant

ex ① $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \boxed{\sin^{-1}\left(\frac{x}{1}\right) + c}$

$f'(x)$

$a = 1$

$f(x) = x$

$f'(x) = 1$

② $\int \frac{2x}{\sqrt{5-x^4}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{x^2}{\sqrt{5}}\right) + c$

$a = \sqrt{5} \rightarrow a^2 = 5$

$f(x) = x^2 \rightarrow f^2(x) = x^4$

$f'(x) = 2x$

③ $\int \frac{e^x}{\sqrt{9-e^{2x}}}\,dx = \sin^{-1}\left(\frac{e^x}{3}\right) + c$

$f(x) = e^x$ $\quad a = \sqrt{9} = 3$

$f'(x) = e^x$

$f^2(x) = e^{2x}$

$\circledast \int \frac{f'(x)}{a^2 + (f(x))^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$, a constant

ex ① $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}(x) + c$

$a = 1$ $\quad f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$

② $\int \frac{1}{7+x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + c$

$a = \sqrt{7}$, $f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$

③ $\frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}}{3+e^{4x}}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\tan^{-1}\left(\frac{e^{2x}}{\sqrt{3}}\right)+c$

$a=\sqrt{3}$, $f(x)=e^{2x} \to f^2(x)=e^{4x}$

$\hookrightarrow f'(x)=2e^{2x}$

نضرب ونقسم على 2

* Definite Integral التكامل المحدود .

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(x)\Big]_a^b = f(b)-f(a)$$ (الجواب النهائي رقم)

نكامل حسب قواعد التكامل غير المحدود ثم نعوض

$$\int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

ex ① $\int_1^2 x^2-2x+1\,dx = \frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}+x\Big]_1^2$ نعوض 2 بالاقتران كامل ومن ثم نعوض الواحد

$\left(\frac{8}{3}-4+2\right)-\left(\frac{1}{3}-1+1\right) = \frac{1}{3}$

② $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,dx = \tan x\Big]_0^{\pi/4}$

$= \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1-0 = 1$

③ $\int_e^{e^2} x^{-1}\,dx = \ln|x|\Big]_e^{e^2}$ $\ln|e^2| - \ln|e| = 2-1 = 1$

Subject Date 27^{th} Dec No.

* خصائص خاصة بالتكامل المحدود :

① $\int_a^b k\,dx = k(b-a) \xrightarrow{ex} \int_3^6 7\,dx = 7(6-3) = 21$

② $\int_a^a f(x)\,dx = 0 \xrightarrow{ex} \int_3^3 x^2+1\,dx = 0$

③ $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \xrightarrow{ex}$ if $\int_1^3 f(x)\,dx = 4$, find $\int_3^1 f(x)\,dx$? -4

④ $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

⑤ $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, if $f(x)$ odd function

ex $\int_{-3}^{3} \sin x\,dx = 0$, $\sin x$ odd function

⑥ $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$, $f(x)$ even function

$\boxed{Exs}$ ① $\int_0^3 7f(x)\,dx = 14$, $\int_5^3 f(x)\,dx = 9$ find:

$7\int_0^3 f(x)\,dx = 14 \div 7 = 2$

* $\int_0^3 f(x)\,dx = 2$

* $\int_3^5 f(x)\,dx = -9$

* $\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^3 f(x)\,dx + \int_3^5 f(x)\,dx \rightarrow 2 + -9 = -7$

Subject Date 28th Dec No.

② $\int_0^2 |x-1|\,dx$ نعيد تعريفها $|x-1|$ $x-1=0 \to x=1$

$[0, 1]: -(x-1) = 1-x$ (- - -), $[1, 2]: x-1$ (+ + +)

$= \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx$

$\left. x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left. \frac{x^2}{2} - x \right]_1^2$

$(1-\frac{1}{2}) - (0) + (2-2) - (\frac{1}{2} - 1)$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Subject Date 30th . Dec No.

Integration by subsituation : التكامل بالتعويض

① $\int x\sqrt{\boxed{3+x^2}}\,dx$

$y = 3 + x^2$

$dy = 2x\,dx \longrightarrow dx = \frac{dy}{2x}$

نعوض

$= \int x\, y^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{2x}$

$= \frac{1}{2}\int y^{\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\right) + C \xrightarrow[y \text{ قيمة}]{\text{نرجع}} \frac{(3+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$

حدود التكامل بالنسبة لـ x

② $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\boxed{\sin x}} \cos x\,dx$

$y = \sin x$

$dy = \cos x\,dx \longrightarrow dx = \frac{dy}{\cos x}$

$\boxed{x=0} \rightarrow y = \sin 0 = 0$

$\boxed{x=\frac{\pi}{2}} \rightarrow y = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

فبرجع للتعويض ونعمل حدود جديدة لـ y

$= \int_0^1 e^y \cos x \frac{dy}{\cancel{\cos x}}$

$\int_0^1 e^y\,dy = e^y\Big]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$

③ $\int \frac{\boxed{\ln x}}{x} dx$

$y = \ln x$

$dy = \frac{1}{x}dx \rightarrow dx = x\,dy$

$= \int \frac{y}{\cancel{x}} \cancel{x}\,dy$

$= \int y\,dy = \frac{y^2}{2} + C \rightarrow \frac{(\ln x)^2}{2} + C$

④ $\int x\,(\boxed{2x+5})^8 dx$

$y = 2x+5$

$dy = 2\,dx \longrightarrow dx = \frac{dy}{2}$

$\int x\,(y)^8 \frac{dy}{2}$

عامل x نعوض بدلالة y من (التعويض)

نجعل x موضوع قانون $x = \frac{y-5}{2}$

$= \int \frac{(y-5)}{2} \cdot y^8 \frac{dy}{2}$

$\frac{1}{4}\int y^9 - 5y^8\,dy \rightarrow \frac{1}{4}\left(\frac{y^{10}}{10} - \frac{5y^9}{9}\right) + C$

نرجع قيمة (y) $\Rightarrow \boxed{\frac{(2x+5)^{10}}{40} - \frac{5(2x+5)^9}{36} + C}$

Subject Date 30^{th} Dec No.

* The fundamental Theorem of calculus :

* النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل :

(هي نظرية مهمة تربط بين الإشتقاق والتكامل)

If f is continuous and g & h differentiable functions **Then:**

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$$

Ex: Find the derivative of the functions:

① $y=\int_3^{\tan x}\sqrt{t+\sqrt{t}}\,dt \Rightarrow y' = \frac{d}{dx}\int_3^{\tan x}\sqrt{t+\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{\tan x+\sqrt{\tan x}}\,(\sec^2 x) - \cancel{\sqrt{3+\sqrt{3}}\,(0)}$

$= \sqrt{\tan x+\sqrt{\tan x}}\,(\sec^2 x)$

② $y=\int_{1-3x}^{1}\frac{t^3}{1+t^3}\,dt \Rightarrow y' = \frac{d}{dx}\int_{1-3x}^{1}\frac{t^3}{1+t^3}\,dt = \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)(0)} - \frac{(1-3x)^3}{1+(1-3x)^3}(-3)$

$= \frac{3(1-3x)^3}{1+(1-3x)^3}$

③ $y=\int_0^{x^4}\cos^2\theta\,d\theta \Rightarrow y' = \frac{d}{dx}\int_0^{x^4}\cos^2\theta\,d\theta = \cos^2(x^4)(4x^3) - \cancel{\cos^2(0)\cdot(0)}$

④ $y=\int_{e^x}^{\sqrt{x}}\ln t\,dt \Rightarrow y' = \frac{d}{dx}\int_{e^x}^{\sqrt{x}}\ln t\,dt \Rightarrow \ln(\sqrt{x})\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) - \ln e^x\,(e^x)$

$= \frac{\ln\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - x(e^x) \leadsto \frac{\frac{1}{2}\ln x}{2\sqrt{x}} - xe^x$

$= \frac{\ln x}{4\sqrt{x}} - xe^x$

⑤ $y=\int_{\sin x}^{\cos x}\sqrt{1+t^2}\,dt \Rightarrow y' = \frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\sqrt{1+t^2}\,dt = \sqrt{1+(\cos^2 x)}\cdot(-\sin x)$

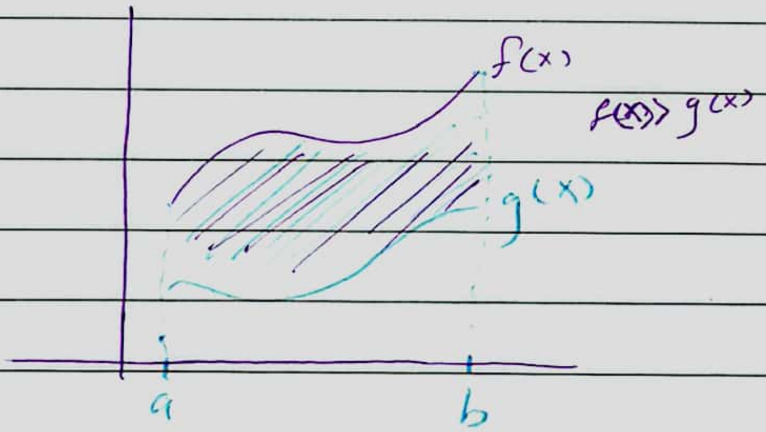
$- \sqrt{1+(\sin^2 x)}\cdot(\cos x)$

Subject Date 2^{nd} . Jan No.

Areas Between Curves: أحد تطبيقات التكامل

المساحة بين المنحنيات:

If f and g are continuous functions on the Interval $[a,b]$ such that $f(x) \geq g(x)$ for all $x \in [a,b]$, then the area of the region bounded above by $f(x)$, below by $g(x)$ on the left $x=a$ on the right $x=b$ is:



$$A = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx$$

① Find the area of the region that enclosed by $y = x^2$ & $y = x+6$?

$x^2 = x + 6$

$x^2 - x - 6 = 0$

$(x-3)(x+2) = 0$

$\boxed{x=3}$ $\boxed{x=-2}$

أولاً: نساوي الاقترانات ببعض عشان نطلع نقاط التقاطع.

ثانياً: نميز الاقتران الأعلى عن طريق:

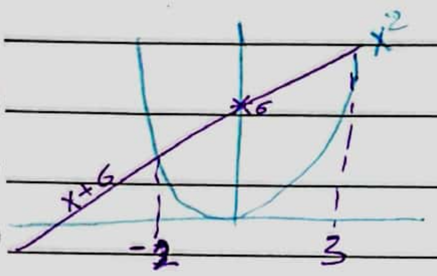
طريقتين

① نرسم الاقترانات (يعني بنعرف عن طريق الرسم)

② نأخذ عدد بين العددين (التقاطع) ونعوض فيه بالاقترانات (العدد الأكبر ← الاقتران الذي يكون بالأعلى)

ثالثاً: نكامل الحدود

Subject Date 2^{nd} : Jan No.



$\boxed{\text{أو}}$

-2 3

0

$y=x^2$ $|=0|$

$y=x+6$ $|=6|$

$6>0$

$$A = \int_{-2}^{3} (x+6)-(x^2)\, dx \Leftarrow$$

$$= \int_{-2}^{3} (x+6)-(x^2)\, dx \quad \text{تكامل}$$

$$= \frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3} \Big]_{-2}^{3} \quad \text{نعوض}$$

$$= \frac{125}{6}$$

* Find Area $y=\cos x$, $y=\sin x$ $[0, \frac{\pi}{2}]$

$\cos x = \sin x$ *متى بيساووا بعض بالفترة من

$[0, \frac{\pi}{2}]$?? $x = \frac{\pi}{4}$

$0 \quad A_1 \quad \frac{\pi}{4} \quad A_2 \quad \frac{\pi}{2}$

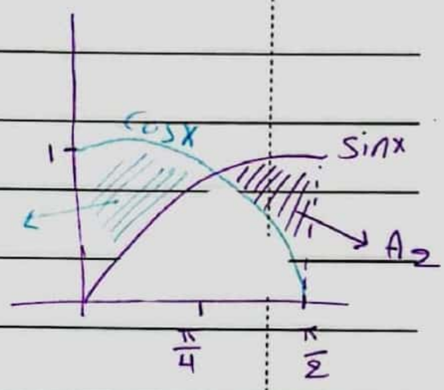
صار رح يصير

$A = A_1 + A_2$ عندي مساحتين

CRAFT NOTEBOOK

Subject Date 2nd Jan No.

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)\,dx$$



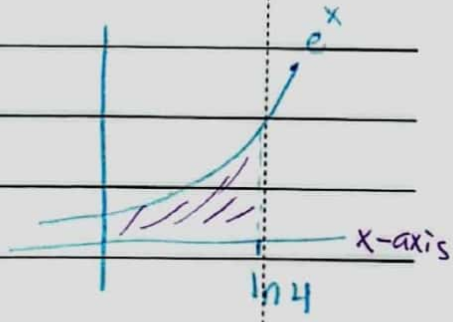
$$A = (\sin x + \cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} + (-\cos x - \sin x)\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

* Area ?? $f(x) = e^x$ & x-axis $[0, \ln 4]$?

$f(x) = 0$ (محور السينات) :

$e^x = 0$ X ما عنا نقاط تقاطع

المساحة المطلوبة حسب الفترة :



$$A = \int_0^{\ln 4} (e^x - 0)\,dx$$

$$e^x\Big]_0^{\ln 4}$$

$$e^{\ln 4} - e^0$$

$$4 - 1 = 3$$

OR

$[0, \ln 4]$, $\ln 2$

e^x → $f(x) = e^x$, $e^{\ln 2} = \boxed{2}$

x-axis → $f(x) = 0$

دائما نقصي الجواب صفر

$|2 > 0|$

* Find Area of the region that enclosed by $|y = x^2 - 4|$ and $|$x-axis$|$?
$y = 0$

$x^2 - 4 = 0 \longrightarrow x^2 = 4$

$x = \pm 2$

$$A = \int_{-2}^{2} (0 - x^2 - 4)\,dx \longrightarrow \int_{-2}^{2} 4 - x^2\,dx$$

-2, 1, 2

$y = x^2 - 4$ → -3 ; $y = 0$ → 0

$|0 > -3|$

CRAFT NOTEBOOK