Numerical Analysis

Types of Error

True Error

E_T = True Value - Approximation Value

$\epsilon_t = \frac{E_{True}}{True\ Value} * 100\%$

= اذا كان معطى بالسؤال يكتب بجانب الرقم نسبة مئوية %

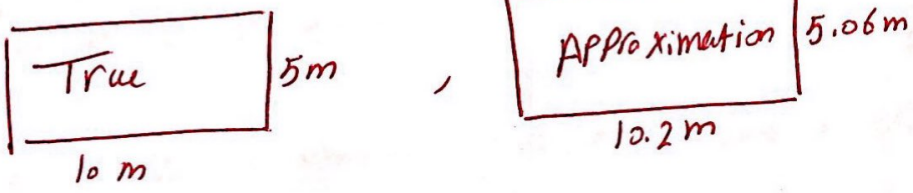
Approximation Error

E_a = New estimate - old estimate

$\epsilon_a = \frac{E_a}{New\ estimation} * 100\%$.

* هذا وهذا نفس الفرق انه بال True Error يكون عندي قيمة حقيقية (True) أكيده يعني ؛ على عكس ال Approximation ما يكون في قيمة حقيقية وهذا هو الي نفيدني بالتحليل العددي لانه بالتحليل العددي ما عندي فاضي يعني ما عندي قيمة حقيقية

EX: find the following for Area :-



find E_T, ϵ_T ?

Sol

Area true = $5 * 10 = 50\ m^2$, A approx. = $5.06 * 10.2 = 51.6\ m^2$

$E_T = |True\ value - App\ value| = |50 - 51.6| = 1.6$

$\epsilon_T = \left|\frac{1.6}{50}\right| * 100\% = 3.2\%$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

Ex 2 We used a method to estimate the +ve (Positive) Root for $f(x) = x^2 - 4x - 5$ and Resulted in the following iterations (المحاولات للحل) :-

i (المحاولة)	x_i
1	3.9
2	4.6
3	4.83
4	4.94

→ given.

Calculate : E_T, ϵ_T, E_a, ϵ_a after the 4th iteration?

Sol E_T = True − Approximation → iter. 4 عند x هيه = 4.94

← من وين اجيب هيه x الحقيقية

$f(x) = x^2 - 4x - 5$

$\Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$

$(x - 5)(x + 1) = 0$

$x = 5$ ✓ , $x = -1$ ✗

← اخذنا جواب واحد بالسؤال محدش Positive +ve Root بيه انه

:- $E_T = 5 - 4.94 = 0.06$

$\epsilon_T = \left|\frac{0.06}{5}\right| * 100\% = 1.2\%$

← لو بالسؤال حكالك الـ Error المسموح به $\geq 1\%$ هنا الرقم غير مقبول به.

$* E_a$ = New estimation − old estimation $= 4.94 - 4.83 = 0.11$

$\epsilon_a = \frac{0.11}{4.94} * 100\% = 2.229\%$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

Tylor Sereis

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)^i f^i(x_0)}{i!} \quad ; \quad f'(x_0): \text{مشتقة } x_0 \qquad x_0: \text{(معطى (الرقم الي عندي}$$

* مستخدم الاشياء اي بنعرفها على سبيل المثال (Cos(90) ؛ Sin(0)) في ايجاد
دوال ما بنعرفها (Cos(3) ؛ Sin(2))

Ex: Expand $f(x) = Sin(x)$ in a taylor Sereis and use it to Approximate the Value of $Sin(\overset{x}{2})$ using the Value of $f(x)$ and it's Derivatirs at $\overset{x_0}{0}$ using 4 Significant figures (لازم 4 خانات)
, The Value of $f(x)$ and its 1st three derivatives (ثلاث مشتقات)
$\hookrightarrow n=0,1,2,3$
at $\underline{0}$?

Sol:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n=3} \frac{(x-x_0)^i f^i(x_0)}{i!} \quad , \quad n=0,1,2,3 \quad , \quad \begin{matrix} x=2 \\ x_0=0 \end{matrix}$$

$$f^0(\underset{\hookrightarrow x_0=0}{0}) = Sin(x) = Sin(0) = 0$$
$$f'(0) = Cos(x) = Cos(0) = 1$$
$$f''(0) = -Sin(x) = -Sin(0) = 0$$
$$f'''(0) = -Cos(x) = -Cos(0) = -1$$

⊛ طلعت المشتقات وبدي اعوضها بال Taylor Sereis.

$$* \; f(2) = \frac{(2-0)^0 * 0}{0!} + \frac{(2-0)^1 * 1}{1!} + \frac{(2-0)^2 * 0}{2!} + \frac{(2-0)^3 * -1}{3!}$$

Sin(2) ←

$$f(2) = Sin(2) = 0 + 2 + 0 - \frac{8}{6} = \underline{0.6667}$$

⊛ اربع خانات كما هو مطلوب بالسؤال

⊛ عالة الحاسبة (True Value) ← Sin(2) = 0.909 ؛ ليش الاختلاف؟ بسبب عدد n ؛ كل ما زدت عدد الـ iterations وصلت لحل اقرب للحل الصحيح.

Tylor Sereis هنا بال Reminder اسمه الـ يعني المتبقي

$$E_T = 0.909 - 0.6667 = 0.2423$$

$$\epsilon_t = \frac{0.2423}{0.909} * 100\% = 26.65\%$$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

Ex: Expand $f(x) = \sin(x) + x^2$ in a taylor Sereis and use it to approximate the Value of $f(\pi/3)$ using the Value of $f(x)$ and its Derivatives at $\pi/4$, using 4 significant figures calculation, The Values of $f(x)$ and its 1st three derivatives at $\pi/4$?

Sol:-

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n=3} \frac{(x-x_0)^i f^i(x_0)}{i!}$$

$$f^0(\pi/4) = \sin(x) + x^2 = \sin(\pi/4) + (\pi/4)^2 = 1.324$$

$$f'(\tfrac{\pi}{4}) = \cos(x) + 2x = \cos(\tfrac{\pi}{4}) + 2*(\tfrac{\pi}{4}) = 2.278$$

$$f''(\tfrac{\pi}{4}) = -\sin(x) + 2 = -\sin(\tfrac{\pi}{4}) + 2 = 1.293$$

$$f'''(\tfrac{\pi}{4}) = -\cos(x) = -\cos(\tfrac{\pi}{4}) = -0.7070$$

$$f(\tfrac{\pi}{3}) = \frac{(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})^0 * 1.324}{0!} + \frac{(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})^1 * 2.278}{1!} + \frac{(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})^2 * 1.293}{2!} + \frac{(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})^3 * -0.7070}{3!}$$

$$f(\tfrac{\pi}{3}) = 1.963$$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

Roots

Breaking methods
1. Bisection
2. false Position

* Open methods
1. Simple fixed point iteration
2. Newton-Raphson method
3. Secant method

Ex: $f(x) = x - 1$ ← شو القيمة اللي بخلي لـ x وبخلي الاقتران يساوي صفر
هذا هو الـ Root يعني الجذر او الحل.

Ex: $f(x) = x^2 - 4x - 5 \Rightarrow (x-5)(x+1) = 0$

$x = 5$, $x = -1$ ⇒ Roots.

Ex: $f(x) = x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 4$ ← ما في قانون بحله لذلك انا مضطر الجأ لطرق التقليل العددي.

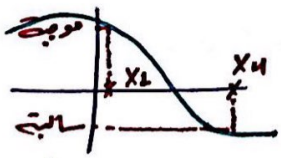
$f(x) = \sin(x) + x$ ← نفس الشيء.

$f(x) = e^x + x + \tan(x)$ ← نفس الشيء.

1 Breaking methods :-

شروط

- لازم تخمن قيمتين ويكون الـ Root واقع بينهم $[X_{lower}, X_{upper}]$ ويكونوا معطى بالامتحان
- الشرط الثاني ← $f(X_{lower}) * f(X_{upper}) < 0$ ؛ يعني واحد صورته موجبة والثاني صورته سالبة لذلك ما هل من جهة سالب



- شرط ثالث ان يكون الاقتران دائماً متصل وبالامتحان بيكون متصل.

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

[A] Bisection method

[1] Check that $f(X_{lower}) * f(X_{upper}) < 0$ → اذا ما تحقق الطريقة غير صالحة

[2] Assume $X_r = \frac{X_L + X_u}{2}$; r: root

[3] Redefine the intervals as follows :-

- if $f(X_r) * f(X_u) = 0$, then X_r is the Root.
- if $f(X_r) * f(X_u) < 0$, Root is located within (X_r, X_u)
  set $(X_L = X_r)$ and go to (2) → الخطوة الثانية
- if $f(X_r) * f(X_u) > 0$, Root is located within (X_L, X_r)
  set $(X_u = X_r)$ and go to (2)

[4] Compare ϵ_s with ϵ_a ; $\epsilon_a = \left| \frac{X_{r,new} - X_{r,old}}{X_{r,new}} \right| * 100\%$

ϵ_s نسبة الـ error اللي السموح بها في السؤال (معطى) ضل حل لحتى توصلها.

ϵ_a نسبة الـ Error اللي بتطلع معك.

هاي E لو كان معها % بتكون ϵ

Ex: find an estimate for $\sqrt[4]{25}$ within 0.05 from actual Root starting within $[2, 3]$ (X_L, X_u) and using 5 figure Places ?

Sol $X = \sqrt[4]{25} \Rightarrow X^4 = 25 \Rightarrow 0 = X^4 - 25 \Rightarrow f(X) = X^4 - 25$

[1] $f(X_L) = f(2) = 2^4 - 25 = -9$, $f(X_u) = f(3) = 3^4 - 25 = 56$

[2] $f(X_L) * f(X_u) < 0$? ⇒ yes, So الطريقة بتنطبق

[2] $X_r = \frac{2+3}{2} = 2.5$

* كمل الحل بجدول الحالي *

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$f(x) = x^4 - 25$

Iteration	X_L	X_u	X_r	$f(X_L)$	$f(X_u)$	$f(X_r)$	Error
①	2	3	2.5	-9	56	14.0625	—
②	2	2.5	$\frac{2+2.5}{2} = 2.25$	-9	14.0625	0.6289	0.25
③	2	2.25	2.125	-9	0.6289	-4.609	0.125
④	2.125	2.25	2.1875	-4.609	0.6289	-2.1022	0.0625
⑤	2.1875	2.25	2.21875	-2.1022	0.6289	-0.76553	0.03125 اقل من 0.05 خلصنا وقت وقف X_r هي الـ Root

* E in ⑤ $= |2.21875 - 2.1875| = 0.03125 < 0.05$ OK اتأكد

The Root is $X = 2.21875$

Note :- Knowing the maximum error, we can know the number of iterations we need to Reach the Root.

$$Es = \frac{Xu - X_L}{(2)^n \rightarrow \#\text{ of iterations}} \Rightarrow 2^n = \frac{\Delta X_0}{Es} \Rightarrow \ln 2^n = \ln\left(\frac{\Delta X_0}{Es}\right)$$

$$n * \ln(2) = \ln\left(\frac{Xu - X_L}{Es}\right)$$

$$\boxed{n = \frac{\ln\left(\frac{Xu - X_L}{Es}\right)}{\ln(2)}} \quad ; \quad n = \frac{\ln\left(\frac{3-2}{0.05}\right)}{\ln(2)} = 4.32 \approx 5$$

دائماً قرب للعدد الاكبر

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

[3] False Position method :-

* نفس اي قبلها مع اختلاف في صيغة X_r

[1] Check that $f(X_L) * f(X_u) < 0$

[2] Assume $X_r = X_u - \frac{f(X_u)(X_u - X_L)}{f(X_u) - f(X_L)}$ → بطريقة Bisection كنا نفرض ال avg هون نفرض الميل بال false position

[3] Redefine the interval as follows :-

- if $f(X_r) * f(X_u) = 0$ → X_r is the Root
- if $f(X_r) * f(X_u) < 0$ → Set $X_L = X_r$ & goto ②
- if $f(X_r) * f(X_u) > 0$ → Set $X_u = X_r$ & goto ②

$f_1(x) = f_2(x)$

Ex :- Find the intersection Point Between The Two Functions $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = x + 2$ Starting with $[0, 1.5]$ using 5 Figures Places, (Error < 0.02) ?

Sol :-

$e^x = x + 2 \Rightarrow e^x - x - 2 = 0 \therefore \boxed{f(x) = e^x - x - 2}$

* $f(X_L) = f(0) = e^0 - 0 - 2 = -1$
* $f(X_u) = f(1.5) = e^{1.5} - 1.5 - 2 = 0.98169$
* $f(X_L) * f(X_u) < 0$ → OK بقدر اكمل الطريقة

$X_r = 1.5 - \frac{(0.98169)(1.5 - 0)}{((0.98169) - -1)} = 0.7569$

$f(0.7569) = e^{0.7569} - 0.7569 - 2 = -0.6252$

Step 2

iteration	X_L	X_u	$f(X_L)$	$f(X_u)$	X_r	$f(X_r)$	Error
①	0	1.5	-1	0.98169	~~0.98169~~ 0.7569	-0.6252	—
②	0.7569	1.5	-0.6252	0.98169	1.1318	-0.03039	0.3749
③	1.1318	1.5	-0.03039	0.98169	1.1428 ← The intersection Point	$-7.264 * 10^{-3}$	~~0.011~~ 0.011 اقل من 0.02 Stop!

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

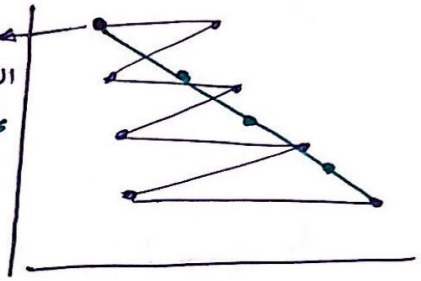
Notes

1- its noticed that the Bisection method is Slow

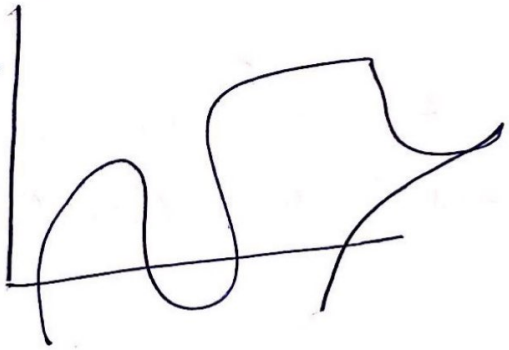
2- false Position method has higher convergence Rate compared to Bisection

3- Bisection method has Better convergance, in the case of functions with highly non-linear Behavior

سلبيات الحل هي كل ما فرضنا ؛
ال Bisection ← Zigzag تطول لتوصل الحل
على عكس ال false Position ما تطول لتوصله.



* كل ما زاد تعقيد ال curve ال Bisection افضل
لانه هيب على ال false position انها تاخذ اميل ؛
هنا شرح النقطة ☝



Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

[2] open - methods :-

* بالطرق السابقة كان بعطيك $[X_l, X_u]$ بهاي الطريقة رح بعطيك بس حقيقة واحدة ؛ وطبعًا بالامكان بجرب بالطريقة اي بستخدمها .

[A] Fixed Point iteration :-

[a] given $f(x)=0$, and initial guess X_0

[b] Rearrange $f(x)=0$ to $x=g(x)$ ⇒ خلي وحدة من الاكسات موضع قانون ويباقي الاكسات عالجهة الثانية .

[c] Apply the Formula $X_{i+1} = g(X_i)$

Ex: $f(x) = \sin(x) - x$

⇒ $\sin(x) - x = 0$ → الخطوة الاولى

$x = \sin(x)$ → الخطوة الثانية

⊛ $X_{i+1} = \sin(X_i)$ → الخطوة الثالثة

Ex: $f(x) = x^2 - 5x + 4$

⇒ $x^2 - 5x + 4 = 0$ → الخطوة الاولى

$x = \sqrt{5x - 4}$ (or) $x = \frac{x^2+4}{5}$ → الخطوة الثانية

(or) $x = \frac{-4}{x-5}$

والخطوة الاخيرة حط X_{i+1} و اعندكل x لكن هاد المهم كيف احدد مين الخيار الامثل لما يكون عندي x في اكثر من موضع قانون ؟

رح تعرف بعدين .

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

Ex: $f(x) = \sqrt{\cos x}$

$\Rightarrow \sqrt{\cos x} = 0$

$x + \sqrt{\cos x} = x$ ⊛ بنزيط اضيف x عالجهتين

Ex: Using the fixed Point iteration Determine the Root of the Function $\sin x - x^2 = 0$ using $x = 1$ as an initial guess and 0.1% tolerance. x لـ ؛ هاي اول قيمة x_u, x_l منك
⊛ بدنا % error هنا

Sol

Step 1 $\sin(x) - x^2 = 0$

Step 2 $x = \sqrt{\sin(x)}$ ⊛ دائماً بلش من $i = 0$

Step 3 $x_{i+1} = \sqrt{\sin(x_i)}$

① $i = 0 \Rightarrow x_{0+1} = \sqrt{\sin(x_0)} \Rightarrow x_1 = \sqrt{\sin(1)} \Rightarrow \boxed{x_1 = 0.9173}$

لـ ملاحظة: دائماً حوط بالـ Radian على الآلة الحاسبة.

* الحروف اسمها على الـ Error في حال ما الزمني بعد، iterations بالسؤال لكن كوني بأول iteration فا رح أطلعها.

② $i = 1 \Rightarrow x_{1+1} = \sqrt{\sin(x_1)} \Rightarrow x_2 = \sqrt{\sin(0.9173)} \Rightarrow \boxed{x_2 = 0.8911}$

$\epsilon = \left|\frac{0.8911 - 0.9173}{0.8911}\right| * 100\% \Rightarrow \epsilon = 2.94\% > 0.1\%$. تكمل

③ $i = 2 \Rightarrow x_3 = \sqrt{\sin(x_2)} \Rightarrow x_3 = \sqrt{\sin(0.8911)} \Rightarrow \boxed{x_3 = 0.8819}$

$\epsilon = \left|\frac{0.8819 - 0.8911}{0.8819}\right| * 100\% = 1.043\%$

تكمل حتى توصل لـ $\epsilon \leq 0.1$

$i = 5 \Rightarrow x_6 = \sqrt{\sin(x_5)} \Rightarrow x_6 = \sqrt{\sin(0.8774)} = 0.8770$

$\epsilon = \left|\frac{0.8770 - 0.8774}{0.8770}\right| * 100\% = 0.045\% < 0.1\%$ (OK)

The Root is $\boxed{x = 0.8770}$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

* for Simple fixed Point iteration :

if :- $\left|\frac{dy}{dx}\right| < 1$ for all X-Range, then the method will converge for any value choosen.

if :- $\left|\frac{dy}{dx}\right| > 1$, around the Root, only X_o should be choosen carefully.

if :- $\left|\frac{dy}{dx}\right| \approx 1$, The method will Converge Slowly

معنى الحكي :- اشتق الاقتران الي انت اخترت ميل (X) موضع للقانون وبعد الاشتقاق عوّض (X_o) اذا طلعت المشتقة اقل من 1 انت شغال صح بالقانون الي انت مطيتك تبع ($X = g(x)$) ؛ اذا المشتقة اكبر من 1 بعد تعويض X_o مرّة معناته اخترت الاقتران الغلط ؛ غير موضع القانون ؛ .

Ex :- use the fixed point iteration to Determine the Root of $f(x) = -X^2 + 1.8X + 2.5$ using $X_o = 5$. Perform Computations until ϵ_a is less than $\epsilon_s = 0.05\%$

Sol

$$-X^2 + 1.8X + 2.5 = 0$$

$$X = \sqrt{1.8X + 2.5} \quad (1)$$

$$X = \frac{X^2 - 2.5}{1.8} \quad (2)$$

$$X = \frac{-2.5}{(X - 1.8)} \quad (3)$$

* أنا بقدر ارتب القانون بهالثلث اشكال ؛ اي واحد استخدم فيهم . والي رح يعطيني الحل الصح ؟

Try $X = \frac{X^2 - 2.5}{1.8} \Rightarrow f'(x) = \frac{2X - 0}{(1.8)^2}$; $\left(\frac{\text{مشتقة المقام} - \text{المقام} \times \text{مشتقة البسط}}{(\text{المقام})^2}\right)$ $\Rightarrow$ X_o عوض

$\Rightarrow f(5) = \frac{2 * 5}{1.8^2} = 3.08$ $\Rightarrow$ * اكبر من 1 يعني القانون غلط لازم استخدم صيغة ثانية .

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

* Try $X = \sqrt{1.8X + 2.5}$

$\Rightarrow f'(X) = \frac{1.8}{2 * \sqrt{1.8X + 2.5}}$; مشتقة دالة الجذر / 2 * الجذر نفسه

$f'(X_0) = \frac{1.8}{2 * \sqrt{1.8*5 + 2.5}} = 0.2653 < 1$ ok ← * الصيغة هاي شغالة.

So: $X = \sqrt{1.8X + 2.5}$

Step 3

$X_{i+1} = \sqrt{1.8X_i + 2.5}$

$i=0 \Rightarrow X_1 = \sqrt{1.8*5+2.5} = 3.3911$, $\epsilon = \frac{3.3911 - 5}{3.3911} * 100\% = 47.4\%$

$i=1 \Rightarrow X_2 = \sqrt{1.8*3.3911+2.5} = 2.933$, $\epsilon = \frac{2.933 - 3.3911}{2.933} * 100\% = 15.6\%$

$i=2 \Rightarrow X_3 = \sqrt{1.8*2.933+2.5} = 2.789$, $\epsilon = \frac{2.789 - 2.933}{2.789} * 100\% = 5.1\%$

← الـ Error قاعد نقل يعني احنا بنقترب من الحل كمل لحتى توصل لـ Error < 0.05%

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

[B] Newton Raphson method:-

[1] given $f(x)$ and initial guess X_0

[2] Rearrange to ⇒ $$X_{i+1} = X_i - \frac{f(X_i)}{f'(X_i)}$$ (الاقتران نفسه / مشتقته)

Ex: $f(x) = X^2 - 1$ ⇒ كيف اجيد ترتيب

$$\Rightarrow X_{i+1} = X_i - \frac{X_i^2 - 1}{2X_i}$$

Ex: $f(x) = X^2 + 2X + 4$

$$\Rightarrow X_{i+1} = X_i - \frac{X_i^2 + 2X_i + 4}{2X_i + 2}$$

Ex: using the Newton Raphson method, determine the Root of the function $f(x) = \sin(x) - X^2$ using $X=1$ as an initial guess and 0.1 % tolerance?

⊛ تنساش حول الـ Radian

Sol $$X_{i+1} = X_i - \frac{\sin(X_i) - X_i^2}{\cos(X_i) - 2X_i}$$

$i=0 \Rightarrow X_1 = X_0 - \frac{\sin(X_0) - X_0^2}{\cos(X_0) - 2X_0} = 1 - \frac{\sin(1) - 1^2}{\cos(1) - 2} \Rightarrow \boxed{X_1 = 0.8914}$

$\epsilon = \frac{0.8914 - 1}{0.8914} * 100\% = 12.18\%$

$i=1 \Rightarrow X_2 = 0.8914 - \frac{\sin(0.8914) - (0.8914)^2}{\cos(0.8914) - (2*0.8914)} \Rightarrow \boxed{X_2 = 0.8770}$

$\epsilon = \frac{0.8770 - 0.8914}{0.8770} * 100\% = 1.642\%$

$i=2 \Rightarrow X_3 = 0.8770 - \frac{\sin(0.8770) - (0.8770)^2}{\cos(0.8770) - (2*0.8770)} \Rightarrow \boxed{X_3 = 0.8767}$

$\epsilon = \frac{0.8767 - 0.8770}{0.8767} * 100\% = 0.03\% < 1\%$ OK, Stop. $X = 0.8767$

* الى الان هذه ٣ طريقة بين كل الطرق لكن فيها مشكلة:-

$f(x) = \cos(e^{2X+X^2}) * \tan(X)$ ← هذا شو الي بده يستقيه؟ رح ابلش استغل بالاقتران وما رح اعرف؛ ايضًا لو الفرض الاول اذ X_0 كان مبلها صفر؛ يعني المشتقة عندها انتظت كانت صفر؛ والمشتقة موجودة بالمقام وبقانون نيوتون - رافسون يعني انت رح تقسم على صفر. فبالتالي كان الاقتران $f(x) = X^4$ ← $f'(x) = 2X$ لو فرضنا انه $X_0 = 2$ ... $f(x) \neq 0$ بسبب هاي المشاكل طوروا لنا طريقة الـ Secant وهي تابعة لنيوتون رافسون لحل مشكلة الاشتقاق اوجاد الميل.

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

C Secant method :

$$f'(x) = \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{(i-1)} - x_i}$$

هذا هو الميل؛ اي هو نفس المشتقة ؛ هيك انا رجعت راسي من موضوع الاشتقاق؛ فذ هذا القانون وعوض مكان المشتقة بـ Newton-Raphson

بصير هيك ⇐ :.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{\frac{(f(x_{i-1}) - f(x_i))}{x_{i-1} - x_i}}$$

عدل شكله ← :.

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{(f(x_i))(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}}$$

* هاي بنسيها ازSecant method ؛ رح تلاحظ انه في عندك x_{i-1} يعني لحالها بدك تعوض $i=0$ رح تصير x_{-1} لذلك بالاقوات رح بعطيك شغلتين x_0 & x_{-1}

Ex: using the Secant method, Determine the Root of the Function $f(x) = \sin(x) - x^2$ using $x_{-1} = 1$ and $x_0 = 2$ as initial guesses and 0.1 % tolerance ?

Sol :- formula : $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$

* ريحت حالي من اشتقاق القانون بـ Newton-Ra لـ Secant اسقدمت ال

$$i=0 \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)(x_{-1} - x_0)}{f(x_{-1}) - f(x_0)}$$

$f(x_{-1}) = f(1) = \sin(1) - 1^2 = -0.1585$

$f(x_0) = f(2) = \sin(2) - 2^2 = -3.091$

صار عوض :.

$$x_1 = 2 - \frac{(-3.091)(1-2)}{-0.1585 - (-3.091)} \Rightarrow \boxed{x_1 = 0.946}$$

$$\epsilon = \frac{0.946 - 2}{0.946} * 100\% = 111.4\%$$

$$i=1 \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_0 - x_1)}{f(x_0) - f(x_1)}$$

$f(x_1) = f(0.946) = -0.08383$

$f(x_0) =$ نفسها

* عوض بالقوانين :.

$$\boxed{x_2 = 0.9166} \Rightarrow \epsilon = \frac{0.9166 - 0.946}{0.9166} * 100\% = 3.208\%$$

* تكملا الحل بالجدول.

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

iteration	x	f(x)	ϵ_a
-1	1	-0.1565	—
0	2	-3.091	—
1	0.946	-0.08383	111.4
2	0.9166	-0.04662	3.208
3	0.8798	-0.0003437	4.163
4	0.8769	-0.000198	0.3307
5	0.8767	-0.00002922	0.02281

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

* Systems of non-linear equations :.

نجلوش منت وتقوعت ← non-linar System ← $\begin{cases} 10x^3 + 3y^{13} = 23 \\ 12x^2 + y^3 = 5 \end{cases}$ non-linear للاقترانات اذ

- To solve we use Newton-Raphson (مثل زي اللي قبل)

- Newton-Raphson method :-

1] Given $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$

2] Arrange the Jacobian matrix

$$J = \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx} & \frac{df_1}{dy} \\ \frac{df_2}{dx} & \frac{df_2}{dy} \end{vmatrix}$$

* الاقتران الاول اشتقه بالنسبة لـ x و y : شابت يكون .
* الاقتران الاول اشتقه بالنسبة لـ y و x الثابت

3] Create :- $x = \begin{vmatrix} f_1 & \frac{df_1}{dy} \\ f_2 & \frac{df_2}{dy} \end{vmatrix}_{0,1,2,3}$, $y = \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx} & f_1 \\ \frac{df_2}{dx} & f_2 \end{vmatrix}_{0,1,2,3}$

y_0

x معها مشتقات اذ y

y معها مشتقات الـ x

4] Solve the iteration system :.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{|x_i|}{|J_i|} \quad , \quad y_{i+1} = y_i - \frac{|y_i|}{|J_i|}$$

magnitude

* وشيك عاد Error وبعيد من أول تقيم x و y الجداد .

Ex: using Newton Raphson method to find the Roots (x_r, y_r) for $x^2 + xy = 10$, $y + 3xy^2 = 57$, use $(x_0 = 1, y_0 = 2)$ and calculate to the Second iteration ?

↳ i=0 & i=1 بين قيمتين

* الحل بالخلف .

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

Sol : $x^2 + xy - 10 = 0$, $y + 3xy^2 - 57 = 0$

$f(x,y)_1 = x^2 + xy - 10$, $f(x,y)_2 = y + 3xy^2 - 57$

← طلع المشتقات :

$\frac{df_1}{dx} = 2x + y$, $\frac{df_1}{dy} = x$

$\frac{df_2}{dx} = 3y^2$, $\frac{df_2}{dy} = 1 + 6xy$ ← Jacobian بعمل *

① $i = 0$

$\Rightarrow J = \begin{vmatrix} 2x+y & x \\ 3y^2 & 1+6xy \end{vmatrix}$

$J_0 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 12 & 13 \end{vmatrix} = 4*13 - 12*1 = 40$

x_0, y_0 عوض بـ

$x_0 = \begin{vmatrix} f_1 & \frac{df_1}{y} \\ f_2 & \frac{df_2}{y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2+xy-10 & x \\ y+3xy^2-57 & 1+6xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ -43 & 13 \end{vmatrix}$

$y_0 = \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx} & f_1 \\ \frac{df_2}{dx} & f_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x+y & x^2+xy-10 \\ 3y^2 & y+3xy^2-57 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 12 & -43 \end{vmatrix}$

$x_1 = x_0 - \frac{|x_0|}{|J_0|} = 1 - \frac{(-7*13) - (-43*1)}{(4*13) - (12*1)} \Rightarrow \boxed{x_1 = 2.2}$

$y_1 = y_0 - \frac{|y_0|}{|J_0|} = 2 - \frac{(4*-43) - (12*-7)}{(4*13) - (12*1)} \Rightarrow \boxed{y_1 = 4.2}$

وبعيد من أول من عند الجاكوبيان بعوض فيها (y_1, x_1) وانزل ؛ وهو طلب ٢ اتيريشن بس ؛

⇐ اسحل الحل

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$i = 1$

$$J_1(x_1, y_1) = \begin{vmatrix} 8.6 & 2.2 \\ 52.92 & 56.44 \end{vmatrix}$$

$$X_1 = \begin{vmatrix} 4.08 & 2.2 \\ 63.62 & 56.44 \end{vmatrix} \quad , \quad y_1 = \begin{vmatrix} 8.6 & 4.08 \\ 52.92 & 63.62 \end{vmatrix}$$

$$X_2 = X_1 - \frac{|X_1|}{|J_1|} \Rightarrow X_2 = 2.2 - \frac{(4.08 * 56.44) - (63.62 * 2.2)}{(8.6 * 56.44) - (2.2 * 52.92)}$$

$$\boxed{X_2 = 1.95}$$

$$y_2 = y_1 - \frac{|y_1|}{|J_1|} \Rightarrow y_2 = 4.2 - \frac{(8.6 * 63.62) - (52.92 * 4.08)}{(8.6 * 56.44) - (2.2 * 52.92)}$$

$$\boxed{y_2 = 3.39}$$

* بالسؤال هذا صدك باتيريشن ؛ طيب لو اعطاك سيف Error بدالها اقارنها بال Error اللي طابع معي من X و y ؟ قارنها بالتيتر ولازم السيف تحقق التيتر

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

⊛ Matrix operations :.

⊛ تخيل عندك كتاب ١٥٠ او ٥٠ معادلة مش منطقي
احنا بدنا كلهم اخليهم بشكل مصفوفة

$$\begin{aligned} 5X+3y &= 2 \\ 4X+5y &= 13 \\ 3X+4y &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 13 \\ 20 \end{bmatrix}$$

بعد المساواة

⊛ تو صف ال matrix بال Cabital letter يعني A ، B بس بدي اعطيك اياز
بتصير A_{3x2} شكلها ؛ اما اذا كان الحرف Small يعني element داخل المصفوفة
لحدة و $\bar{L}$ تحت مجنون

شكلي بدي اوصف لا 2 جواك ال A لازم يكون نفس الرمز بين Small واحط موقعها
يعني ال 3 ← a_{12} صنوج تغيير الحرف لازم نفس .

⊛ Matrix addition and sub:.

A+B :. في شرط لازم تتحقق ؛ انهم يكونوا نفس ال size
* The size of A must equal the size of B

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A+B=C$$

صار بحجم هون
وممكن ١

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

⊛ Matrix multiplication:

$$A_{3\times 2} * B_{2\times 4} = C_{3\times 4}$$

must equal

* The number of columns in A must equal the number of Rows in B.

Ex

$$A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = C = \begin{bmatrix} C_{11}=22 & C_{12}=16 \\ C_{21}=20 & C_{22}=12 \\ C_{31}=12 & C_{32}=7 \end{bmatrix}$$

$C_{11} = (1*2) + (5*4) = 22$

$C_{12} = (1*1) + (5*3) = 16$

$C_{21} = (6*2) + (2*4) = 20$

$C_{22} = (6*1) + (2*3) = 12$

⊛ لو كان الشرط غير متحقق تبع الغرب كان لهيت elements وما عرفت بشو نضربهم لانه ما في elements مناظرة لبعض.

⊛ Matrix inverse $[A^{-1}]$

$$A_{3\times 3} * A^{-1}_{3\times 3} = I_{3\times 3}$$ نفس السايز

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

⊛ Matrix transpose : A^T

$A_{3\times2} \Rightarrow A^T_{2\times3}$ ⇒ كل صف بقلب عمود

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{3\times2} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

⊛ في عمليات تقدر تعاملهم على الصفوف بس ما تقدر تعاملهم على الاعمدة.

⊛ Raw operations :-

[A] Raw Swapping → بنفع انك تبدل اماكن الصفوف بشرط انك تشيل كل شي مع النواتج لفوق او تحت

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$ ⊛ هنا دخل نفس الاشي لو كان في اشي بجد المساواة بترفعه معهم.

[B] multiplication By Factor(K)

⊛ طلب فلك Raw1 → 3 R_1 ⇒ Raw

$$A_{2\times2} = \begin{bmatrix} 2*3 & 1*3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

[C] Raw addition :

Ex: $2R_1 + R_2 \Rightarrow R_2$ → ⊛ بحلك خلي مكان العمليات هاي بالصف الثاني

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ (2*2)+6 & (1*2)+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

Gauss Elimination :

- Given System of linear equations $Ax = b$

- حل النظام الخطي :
طريقة لايجاد x_1, x_2, x_3

مثلاً: $4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$

$10x_1 + x_2 + 4x_3 = 2$

$5x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1$

[1] Augment A and b, $[A|b]$ ⊛ اول الخطوات التي نبدأ بها الحل

⊛ حول المعادلات لهذا الشكل ←

$$\begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad b \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 5 \\ 10 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

← التي بعد اليساوي وتراه .

[2] Using Raw operations to Redull A to an upper Triangular matrix - ثم استخدام قواعد الصفوف للحصول على شكل علوي

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

- استخدم ما تبقى في الصفوف بايجاد معادلات وايجاد المتغيرات المطلوبة.

[3] Using Backword Substitutions to find the value of x_1, x_2, x_3

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

Ex :- Solve the following system using Gaussian Elimination method :-

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + 6X_3 &= 7 \\ -X_1 + 2X_2 + 9X_3 &= 2 \\ X_1 - 2X_2 + 3X_3 &= 10 \end{aligned}$$

⊛ دير بالك يكون في Constants مش كالهم ؛ يعني دائماً على الثوابت بعد المساواة .

Sol :-

1) $[A|b] \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 7 \\ -1 & 2 & 9 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 10 \end{bmatrix}$

* كيف أصفّر و اعمل مثلث ؟

1) نجدد ركيزة ؛ اختار رقم كل شي تحته ح أخليهم صفار . △

ثم ∴ $\frac{(-1)}{1}$ ← الرقم اللي بدي اصفره / الركيزة ← سالب ⊖ وهذا بضربه بالصف اللي فيه الركيزة ويجمعه

الصف اللي بدي اصفره ؛ وكل هذا بخليه بالصف اللي بدي اصفره بـ R_2 يعني .

$$\Rightarrow -\left(\frac{-1}{1}\right) * R_1 + R_2 \Rightarrow R_2$$ يعني

$$1 * (1 \quad 1 \quad 6 \quad 7)$$
$$(-1 \quad 2 \quad 9 \quad 2) +$$

$(1*1-1) = 0$ ، $(1*1+2) = 3$ ، $(1*6+9) = 15$ ، $(1*7+2) = 9$

∴ R_2 : 0 3 15 9 ← الصف الثاني الجديد

← الصفر

⊛ ثاني اشي بدي اصفر اخر صف تحت نفس الركيزة

$$\Rightarrow -\left(\frac{1}{1}\right) * R_1 + R_3 \Rightarrow R_3$$
$$-1 (1 \quad 1 \quad 6 \quad 7)$$
$$(1 \quad -2 \quad 3 \quad 10) +$$

$(-1*1+1) = 0$ ، $(-1*1+-2) = -3$ ، $(-1*6+3) = -3$ ، $(-1*7+10) = 3$

$R_3 = 0, -3 \quad -3 \quad 3$ ← الصف الثالث الجديد

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

صار شكلها ⇒

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 15 & 9 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

* هـا بدنا نصفر الـ 3- لذلك بدنا ركيزة △ فوق الاشي اللي بدل تصفره لانه كل شي تحت الركيزة لازم تقلب صفار.

بدي اصفره ← $\Rightarrow -\left(\frac{-3}{3}\right) * R_2 + R_3 \Rightarrow R_3$

R_3 ← الناتج اللي مكان الصف لقرار تصفيره.

R_2 ← الصف اللي فيه الركيزة

R_3 ← الصف اللي فيه اللي بدي اصفره

ركيزة ← الصف اللي فيه الركيزة

$a = -\left(\frac{-3}{3}\right) = 1$

$\Rightarrow 1\,(0 \quad 3 \quad 15 \quad 9)$

$(0 \quad -3 \quad -3 \quad 3) +$

$0 \quad 0 \quad 12 \quad 12 \Rightarrow R_3 \text{ new}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} X_1 & X_2 & X_3 & b \\ 1 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 15 & 9 \\ 0 & 0 & 12 & 12 \end{array}\right]$$

* هـا بعمل المعادلات من تحت لفوق

$\Rightarrow 12 X_3 = 12 \Rightarrow \boxed{X_3 = 1}$

$\Rightarrow 3 X_2 + 15 X_3 = 9 \Rightarrow \boxed{X_2 = -2}$

$\Rightarrow X_1 + X_2 + 6 X_3 = 7 \Rightarrow \boxed{X_1 = 3}$

* مرات يكون النظام حله ما اله حل بسبب عدم وجود نقطة تقاطع مظلع معك اشي مش منطقي $12 = 0$ مثلاً ؛ بس المشكلة مش بغاوس انما المعادلات ما في بينها تقاطع يعني مش حل No Solution

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

* ملاحظة :

امرّ على انك عندك النظام التالي :-

$$X_1 + X_2 + 6X_3 = 7$$

$$-X_1 + 2X_2 + 9X_3 = 2$$

$$X_1 - 2X_2 + 3X_3 = 10$$

لاحظ انك رح تقسم على صفر لو بلشت فيه وهلته ركيزه ؛ لذلك بنفع انك تبدل بين الصفوف وهيك تتجاوز هذا المشكلة بعض زي كمان تريب للعادلات اختلف دوحده قوى التاليه فا رح يفرق الحل .

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

- Pitfalls of Gauss Elimination :-

1. Pivot = 0 ⇒ اذا الركيزة يساوي صفر ؛ بدّل الصفوف بشرط تختار اكبر رقم تحت الركيزة ؛ واذا ملقيت تبديل لازم تكمل تبديل.

Solution : Swapping Row to ensure that the Pivot element has the largest magnitude.

Ex: Solve the System of equations:- (find X_1, X_2, X_3)

$$2X_2 + 3X_3 = 8$$
$$4X_1 + 6X_2 + 7X_3 = -3$$
$$2X_1 + X_2 + 6X_3 = 5$$

← معامل $X_1 = 0$ يعني الركيزة صكمت صفر لذلك لازم ابدل الصفوف ؛ بتطلع على معاملات الـ X_1 اللي تحتها وتختار اطلق اكبر رقم فيهم وتبدل الصفوف

Sol :- الركيزة صفر.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 8 \\ 4 & 6 & 7 & -3 \\ 2 & 1 & 6 & 5 \end{array}\right]$$

← رح ابدل بالصف تبع اكبر رقم تحت الركيزة.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 7 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 6 & 5 \end{array}\right]$$

⇒ صفر already ← يعني روح عالي كمان

$$\Rightarrow -\left(\frac{2}{4}\right) * R_1 + R_3 \Rightarrow R_3$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) * \begin{array}{cccc} -2 & -3 & -3.5 & +1.5 \\ (4 & 6 & 7 & -3) \\ (2 & 1 & 6 & 5) + \end{array}$$

$$(0 \quad -2 \quad +2.5 \quad 6.5)$$

Scanned with CamScanner

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 7 & -3 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 8 \\ 0 & -2 & 2.5 & 6.5 \end{array}\right] \Rightarrow -\left(\frac{-2}{2}\right) * R_2 + R_3 \Rightarrow R_3$$

* معلومة؟ اذا بلشت تبديل لازم تكمل تبديل ؛

يعني لو كانت تحت الـ 2 بالصف اللي تحتها رقم فتحة الطلقة الجبر من 2 لازم تبدل الصفوف ؛ يعني لازم الوكيزة دائماً تكون الجبر من كل اللي تحتها (في حال التبديل فقط)

* يعني سؤال المحاضرة الماضية مع انه الوكيزه اقل من اللي تحتها لكن ما بدلنا لو بدلنا ؛ كان لازم نخليها الجبر اشي. (ما كان يعني اذا الوكيزة الجبر اشي او لا)

* ممكن يعجبك سؤال بالبداية ما تكون وكيزتك صفر بس السؤال بحكيلك اعمل تبديل (من راسه) لذلك نفس خطوات هذا السؤال. لازم تظل تبدل.

أكمل الحل ←

$$(1)\ (0\ 2\ 3\ 8)$$
$$(0\ -2\ 2.5\ 6.5)\ +$$
$$0\ \ 0\ \ 5.5\ \ 14.5$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 7 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 5.5 & 14.5 \end{array}\right]$$

$5.5\,X_3 = 14.5 \Rightarrow$ get X_3 then X_2 then X_1

$\boxed{X_3 = 2.64}$, $\boxed{X_2 = 0.045}$ $\boxed{X_1 = -5.43}$

Scanned with CamScanner

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 7 & -3 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 8 \\ 0 & -2 & 2.5 & 6.5 \end{array}\right] \Rightarrow -\left(\frac{-2}{2}\right) * R_2 + R_3 \Rightarrow R_3$$

* معلومة؟ اذا بلشت تبديل لازم تكمل تبديل ؛
يعني لو كانت تحت الـ 2 بالصف اللي تحتها رقم متبقي المطلقة اكبر من 2 لازم تبدل الصفوف ؛ يعني لازم الركيزة دائماً تكون اكبر من كل اللي تحتها (في حال التبديل فقط)

* يعني سؤال المحاضرة الماضية مع انه الركيزة اقل من اللي تحتها لكن ما بدلنا لو بدلنا ؛ كان لازم نخليها اكبر اشي. (ما كان يعني اذا الركيزة اكبر اشي او لا)

* ممكن يجيلك سؤال بالبداية ما تكون ركيزتك صفر بس السؤال بحكيلك اعمل تبديل (من راسه) لذلك نفس خطوات هذا السؤال. لازم تعمل تبديل.

أكمل الحل ←

$$(1)\ (0\ \ 2\ \ 3\ \ 8)$$
$$(0\ -2\ \ 2.5\ \ 6.5)\ +$$
$$0\ \ 0\ \ 5.5\ \ 14.5$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 7 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 5.5 & 14.5 \end{array}\right]$$

$5.5\,X_3 = 14.5 \Rightarrow$ get X_3 then X_2 then X_1

$\boxed{X_3 = 2.64}$, $\boxed{X_2 = 0.045}$ $\boxed{X_1 = -5.43}$

Scanned with CamScanner

② Singular System :- (Det = 0)

دائمًا المحددة لازم تساوي صفر لكن لازم أحل Singular System عشان اعرف هو من اي نوع لانه ال (No Solutions, infinite Solutions) يتفرّع الى نوعين

* اذا انسألت هذا Singular اولاً بجيب ال Det، لو بيه النوع بتعب بيحل حل.

[A] System with infinite Solutions :-

Ex:-

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 4 \\ 4 & -4 & 8 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left(-\frac{4}{2}\right)(R_1) + R_2 \Rightarrow R_2$$

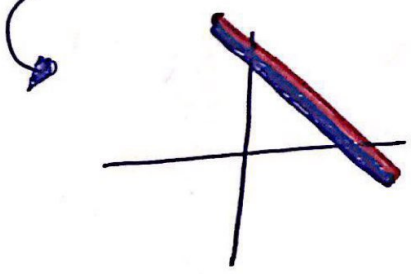
$$\begin{array}{c|ccc} -\frac{4}{2} & 2 & -2 & 4 \\ & 4 & -4 & 8 \\ \hline & 0 & 0 & 0 \end{array} +$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow 0X_1 + 0X_2 = 0 \rightarrow 0 \neq 0$$

غير مقبولة بالرياضيات.

عدد لانهائي من الحلول؟ يعني عوض X_1 ، X_2 بأي رقم بخطر على بالك؟ دائمًا الجواب صفر.

(كيف اقوانين بكون فيهم عدد لانهائي من الحلول؟ يعني تقاطعات دائمًا) هيك



Scanned with CamScanner

[B] System with no solution :-

Ex: $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 4 \\ 4 & -4 & 6 \end{array}\right]$

$-\left(\frac{4}{2}\right) * R_1 + R_2 \Rightarrow R_2$

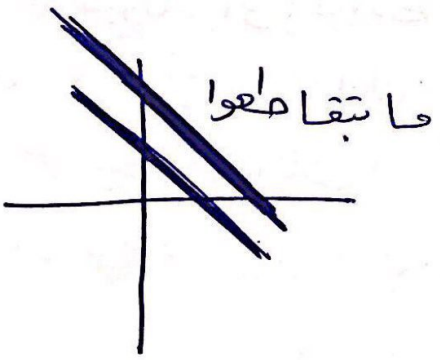
$$\begin{array}{r} -2\,(2 \quad -2 \quad 4) \\ (4 \quad -4 \quad 6)+ \\ \hline 0 \quad 0 \quad -2 \end{array}$$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$

$\hookrightarrow 0x_1 + 0x_2 = -2$

$\Rightarrow 0 = -2$!!

No Solution.



Scanned with CamScanner

3] ill Condition System :- آخر حالة في الحالات

- شو اللي يصير ؟ تغيير بسيط بمعاملات الـ X_1 ، X_2 ، X_3 يؤدي الى تغيير كبير في الحلول .

- Small change in the coefficients in the matrix lead to large change in the Solution.

⊛ $\left[\begin{array}{cc|c} 100 & -101 & 200 \\ 200 & -200 & 300 \end{array}\right] \Rightarrow X_1 = -48.5 \ , \ X_2 = -50$

مع انك ما غيرت الا الـ 101- لـ 99- اللي بسيط .

الفرق بينهم 100 !

⊛ $\left[\begin{array}{cc|c} 100 & -99 & 200 \\ 200 & -200 & 300 \end{array}\right] \Rightarrow X_1 = 51.5 \ , \ X_2 = 50$

⊛ How to check System conditions ? ⊛ طيب كيف اكتشف ؟

- using the Determinant for the normalized Coefficint matrix.

if Det A ≠ 0 ; the System is ill Condition

$\left[\begin{array}{cc} \frac{100}{100} & \frac{-99}{100} \\ \frac{200}{200} & \frac{-200}{200} \end{array}\right]$

⊛ بقسم القيم في كل صف على مطلق اكبر رقم فيها ؛ كل صف لحاله و ما اله دخل بالصف اللي فوقه .

بعدها بجيب المحددة للناتج

$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc} 1 & -0.99 \\ 1 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow Det(A) = 0.01 \neq 0 \Rightarrow$ ill Condition

Scanned with CamScanner

Solution: Solve the system using highest accuracy possible to minimize Round off Error

الحل انك تكون دقيق كتير وما تقرب.

إذاً: ① امسح على مطلق اكبر معامل لكل صف على كل القيم في نفس الصف

② اصبح المحددة لو كانت تقريباً صفر يكون ill

* لو كان صفر تماماً ما يكون ill دير بالك يكون Singular

Ex: is this an ill condition or not?

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 6 & 4 \\ 1 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

Sol:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{6} & \frac{6}{6} & \frac{4}{6} \\ \frac{1}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{7}{7} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0.33 & 0.66 \\ -0.33 & 1 & 0.666 \\ \frac{1}{7} & \frac{-3}{7} & 1 \end{bmatrix}$$

Det = 1.4 → Not ill Condition

ملاحظة: اذا طلع الـ Diagonal صفر او اقرب شيء منه ill بدون ما تتأكد من حساب الـ Det

Scanned with CamScanner

Ex

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

① السؤال الاول Singular او لأ؟
هنا شرع احسب المحددة (Det) وشوف اذا Singular او لأ.

② السؤال الثاني هل هذا او System ill؟ او لأ؟
بروح بقسم كل الجو معامل وبدها بجيب المحددة وبشوف اذا ≠ 0 او لأ.

Scanned with CamScanner

Numerical Second :-

* LU Decomposition :-

- حل النظام الخطي بدون استخدام Gauss انها طريقة كبيرة

$$\bar{A}\ \bar{X} = \bar{b}$$

$\bar{A}$ مصفوفة معاملات — $\bar{X}$ مجهول — $\bar{b}$ مصفوفة نواتج

[1] in this method the A matrix is decomposed in Two matrixes :

$A = L\ U$:- * فصل الـ A الى Upper & lower

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

Lower Triangular matrix — Upper triangular matrix

[2] Solve $\bar{L}\bar{d} = \bar{b}$ by forward substitution ⊙ find $\bar{d}$

($\bar{L}$: lower مصفوفة — $\bar{d}$: مجهول — $\bar{b}$: من السؤال)

d:- intermediate Vector

[3] find X, Solve $UX = d$ by backword substitution

(X: هاني في الحلول — U: مصفوفة الـ upper — d: اللي طلعناها من الخطوة 2)

[X] in this method assume the main Diagonal for the Lower matrix is 1

Scanned with CamScanner

Example :-

* main Diagonal = 1 قيم القطر

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

Lower — Upper — مصفوفة الوحدة

- ضرب الصف الاول بالعمود الاول ، بعدين الصف الاول بالعمود الثاني بعدين الصف الاول بالعمود الثالث ، ثم الانتقال الى الصف الثاني وهكذا .

$$:-(U_{11} * L_{11}) + (0*0)+(0*0) = 2$$

$L_{11} = 1$

So ; $\boxed{U_{11} = 2}$

$$, (U_{12} * L_{11}) + (U_{22} * 0) + (0 * 0) = 3$$

$$\boxed{U_{12} = 3}$$

$$, (U_{13} * L_{11}) + (U_{23} * 0) + (U_{33} * 0) = -2$$

$$\boxed{U_{13} = -2}$$

* للصف الاول بمصفوفة L

, for the Second Row in L :-

$$(U_{11} * L_{21}) + (0 * L_{22}) + (0 * 0) = 1$$

$$2 * L_{21} = 1 \Rightarrow \boxed{L_{21} = \frac{1}{2}}$$

$$(U_{12} * L_{21}) + (U_{22} * L_{22}) + (0 * 0) = 2$$

$$(3 * \frac{1}{2}) + (U_{22} * 1) + (0 * 0) = 2$$

$$\boxed{U_{22} = \frac{1}{2}}$$

$$(U_{13} * L_{21}) + (U_{23} * L_{22}) + (U_{33} * 0) = 3$$

$$(-2 * \frac{1}{2}) + (U_{23} * 1) + (U_{33} * 0) = 3$$

$$-1 + U_{23} = 3$$

$$\boxed{U_{23} = 4}$$

* للصف الثاني بمصفوفة L

Scanned with CamScanner

* For the 3rd Row in L:

$(U_{11} * L_{31}) + (0 * L_{32}) + (0 * L_{33}) = 5$

$(2 * L_{31}) + 0 + 0 = 5$

$\boxed{L_{31} = 2.5}$

$(U_{12} * L_{31}) + (U_{22} * L_{32}) + (0 * L_{33}) = 4$

$(3 * 2.5) + (\frac{1}{2} * L_{32}) + 0 = 4$

$\boxed{L_{32} = -7}$

$(U_{13} * L_{31}) + (U_{23} * L_{32}) + (U_{33} * L_{33}) = -1$

$(-2 * 2.5) + (4 * -7) + (U_{33} * 1) = -1$

$\boxed{U_{33} = 32}$

* احل بهالطريقة طويل جدًا حيث كل اي كلناه هو بس اول خطوة فصل اى lower و upper ، جرب حل نفس السؤال كل فاوس.

Ex:

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

بنقوم بالـ lower

$-\frac{1}{2}(R1) + R2 \Rightarrow R2$

بنقوم بالـ lower

$-\frac{5}{2}(R1) + R3 \Rightarrow R3$

$-\frac{1}{2}\ (2 \quad 3 \quad -2)$

$(1 \quad 2 \quad 3) +$

$0 \quad 0.5 \quad 4$

$\rightarrow R2$

$-\frac{5}{2}(2 \quad 3 \quad -2)$

$(5 \quad 4 \quad -1) +$

$0 \quad -3.5 \quad 4$

$\rightarrow R3$

Scanned with CamScanner

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0.5 & 4 \\ 0 & -3.5 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{-3.5}{0.5}(R2)+R_3 \Rightarrow R_3}$$

↳ هنخزنها بالـ lower

$$7\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -3.5 & 4 \end{pmatrix} +$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 32 \end{pmatrix} \leftarrow R_3$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0.5 & 4 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}$$

هاي بتمثل الـ Upper

lower matrix

∴ ⊛ الـ lower أول حل

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3.5}{0.5} & 1 \end{bmatrix}$$

Zero's دائماً

main Diagonal = 1

الأرقام الـ ٣ اللي تحت هقت نفسهم العمليات اللي عملت في الـ Upper بالخطوات السابقة بس بدون اشارة السالب اللي كنا نحطها بفرق بس الـ $\left(\frac{\text{رقمي}}{\text{المركزية}}\right)$ بدون السالب بس لو في سالب أصلي بالرقم خليه موجود زي الـ $\left(\frac{-3.5}{0.5}\right)$

So:

Upper: A after upplying Gauss elimination

Lower: take the Value of Elimination Coefficint's

Scanned with CamScanner

⊛ كل اللي عملناه كان نقط لفصل A الى lower و Upper

- لـــا مثال كامل .

Ex Solve the Following System Using Gauss Elimination LU Decomposition.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad b$$

⊛ بدنا X_1, X_2, X_3 ؟

[1] افصل الى lower و Upper زي قبل شوي عن طريق غاوس .

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 2.5 & -7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0.5 & 4 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}$$

[2] الخطوة الثانية $Ld = b$ المجهول هو d فقط .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 2.5 & -7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

اعمل معادلات من فوق لتحت :

$$\boxed{d_1 = 2}$$

$$0.5\, d_1 + d_2 = 1 \rightarrow \boxed{d_2 = 0}$$

$$2.5\, d_1 + -7\, d_2 + 1\, d_3 = 1 \rightarrow \boxed{d_3 = -3}$$

⊛ بالامتحان بطلب منك مصفوفة الـ lower او الـ Upper او d_1, d_2, d_3 كمان السؤال من اساسه بنحل عالآلة الحاسبة بثواني .

Scanned with CamScanner

④ الخطوة الثالثة : $U X = d$ ؛ اذ Upper معروف وال d معروف

المجهول X_1, X_2, X_3 الي هم مطالب السؤال.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0.5 & 4 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

* اخل معادلات من تحت لفوق.

$$\rightarrow X_3 = \frac{-3}{32} = -0.09375$$

$$\rightarrow X_2 \Rightarrow 0.5 X_2 + 4 X_3 = 0 \Rightarrow X_2 = 0.75$$

$$\rightarrow X_1 \rightarrow 2X_1 + 3X_2 - 2X_3 = 2 \Rightarrow X_1 = -2.7182$$

Scanned with CamScanner

* Calculating Matrix inverse using LU Decomposition

$$A A^{-1} = I$$

* اذا A 3x3 الانفرس اكيد لازم يكون 3x3 وال I لازم يكون 3x3

المصفوفة الاصلية — ال inverse للمصفوفة — I

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

x_1 x_2 x_3 — b_1 b_2 b_3

لكل أسماء للأعمدة

إحفظ شكل مصفوفة ال I واحفظ b_1 , b_2 , b_3

٣ معادلات

$\Rightarrow A X_1 = b_1$

X_1 اول عمود بالإنكل — b_1 اول عمود بال b

* حل المعادلة الاولى طلع X_1 اللي هو اول عمود بال Inverse

$\Rightarrow A X_2 = b_2$

X_2 ال Colum الثاني بالانفرس — b_2 العمود الثاني بال b

$\Rightarrow A X_3 = b_3$

X_3 العمود الثالث بالانفرس

* بالاخير ممكن طلبة منك ال Column بس لاحظ انك ال b ما يكون مفصيلك اياها لازم تكون حافظها

Scanned with CamScanner

Example: Calculate the 3rd Column of the inverse matrix for

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{bmatrix} ?$$

يعني بدي اروح على معادلة $AX_3 = b_3$

$$b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sol

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

* حلها باستخدام كاوس والـ LU .

وفصل مصفوفة الـ A الى lower و upper

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 2.5 & -7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0.5 & 4 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}$$

lower — upper

[2] الخطوة الثانية $Ld = b$

بالعادة دليس دائماً ح تطلع معك $b = d$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 2.5 & -7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$d_1 = 0$, $d_2 = 0$, $d_3 = 1$

Scanned with CamScanner

[3] الخطوة الثالثة $UX = d$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0.5 & 4 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow X_3 = \frac{1}{32}$, $\boxed{X_3 = 0.03125}$

$\Rightarrow 0.5 X_2 + 4 X_3 = 0 \Rightarrow \boxed{X_2 = -0.25}$

$\Rightarrow 2X_1 + 3X_2 - 2X_3 = 0 \Rightarrow \boxed{X_1 = 0.40625}$

⊛ إذاً العمود الثالث ←

$$\begin{bmatrix} 0.40625 \\ -0.25 \\ 0.03125 \end{bmatrix}$$

⊛ نوظف منه العمود الثاني بتعوض

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

* Jacobi and Gauss Seidel Iteration :-

* حل النظام الخطي بطريقة ثالثة غير LU وهي Gauss

- These method used to Solve linear system.

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 = b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 = b_2$$

$$a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 = b_3$$

- صعب جداً الطرق هاي خالين ادم وصلة علاقة الحاسبة عكس الي اقدامهم قبل كانوا سهلين علينا.

- الحل يعتمد بالمعادلة الاولى X_1 موضع ثابت و بالمعادلة الثانية X_2 موضع ثابت وبالمعادلة الثالثة X_3 موضع ثابت.

for ①
$$X_1 = \left(\frac{b_1 - a_{12} X_2 - a_{13} X_3}{a_{11}} \right) \rightarrow g(x)$$

for ②
$$X_2 = \left(\frac{b_2 - a_{21} X_1 - a_{23} X_3}{a_{22}} \right)$$

for ③
$$X_3 = \left(\frac{b_3 - a_{31} X_1 - a_{32} X_2}{a_{33}} \right)$$

Scanned with CamScanner

[A] Jacobi :-

من أجل هذا فقط

$$x_1^{i+1} = \frac{b_1 - a_{12}x_{2,i} - a_{13}x_{3,i}}{a_{11}}$$

$$x_2^{i+1} = \frac{b_2 - a_{21}x_{1,i} - a_{23}x_{3,i}}{a_{22}}$$

$$x_3^{i+1} = \frac{b_3 - a_{31}x_{1,i} - a_{32}x_{3,i}}{a_{33}}$$

[B] Gauss-Seided :-

$$x_1^{i+1} = \frac{b_1 - a_{12}x_{2,i} - a_{13}x_{3,i}}{a_{11}}$$

نفس Jacobi

هاي جايي لاني ما الاقطع

لاحظ اخذت القيمة اي مباشرة

$$x_2^{i+1} = \frac{b_2 - a_{21}x_{1,i+1} - a_{23}x_{3,i}}{a_{22}}$$

$$x_3^{i+1} = \frac{b_3 - a_{31}x_{1,i+1} - a_{32}x_{2,i+1}}{a_{33}}$$

* الفرق بين Jacobi و Gauss بالمعادلتين الثانية والثالثة

Scanned with CamScanner

Ex

$$X_1 + (5)X_2 + 1 X_3 = 12$$

لاحظ معامل X_2 اكبر من معامل $X_3 + X_1$ لذلك
بجعل من هاي المعادلة X_2 موضع للقانون

$$(6)X_1 + 3X_2 + 2X_3 = 17$$

معامل X_1 اكبر من معامل $X_3 + X_2$ لذلك بجعل
من هاي المعادلة X_1 موضع للقانون

$$3X_1 + X_2 + (7)X_3 = 1$$

معامل X_3 اكبر من معامل $X_1 + X_2$ لذلك
بجعل من هاي المعادلة X_3 موضع للقانون.

Example: Solve the following system of linear algebraic equations using Gauss-Seidel method and starting with the initial guess vector $X^0 = [\overset{X_1^0}{0}, \overset{X_2^0}{0}, \overset{X_3^0}{0}]$, use tolerance of 0.1 % for all variables

$$6X_1 - 2X_2 + X_3 = 11 \rightarrow$$ معامل X_1 اكبر مفهم كلهم

$$-2X_1 + 7X_2 + 2X_3 = 5 \rightarrow$$ معامل X_2 اكبر مفهم كلهم

$$X_1 + 2X_2 - 5X_3 = -1 \rightarrow$$ معامل X_3 اكبر مفهم كلهم

→ فنحكي هوت عن القيمة المطلقة

* اول خطوة نجعل مواضع القوانين لـ X_1 ، X_2 ، X_3 ؛ لازم معامل المجهول يكون اكبر اي بالمعادلة ما راح تو صل حل لو ما تعمل هيك .

Scanned with CamScanner

- Convergance Criteria :

it's Similar meanner as Simple Fixed Point

* طاي النقطة بتخص اختيار موضع القانون بالعلاقة

$$\left|\frac{dg}{dx_1}\right| + \left|\frac{dg}{dx_2}\right| + \left|\frac{dg}{dx_3}\right| < 1$$

* اختيار موضع القانون لكل من x_1 ، x_2 ، x_3 مش عشوائي ؛
مشتقتها بالنسبة لـ x_1 ، مشتقتها بالنسبة لـ x_2 ومشتقتها بالنسبة لـ x_3
اقل من 1 ضدها اكبر من 1 عشان:

$$\left|0\right| + \left|\frac{-a_{12}}{a_{11}}\right| + \left|\frac{-a_{13}}{a_{11}}\right| < 1$$

(مشتقة المعادلة الاولى بالنسبة لـ x_2)
(مشتقة المعادلة الاولى بالنسبة لـ x_1)
(فيه مطلقة)

$$\Rightarrow \frac{a_{12}}{a_{11}} + \frac{a_{13}}{a_{11}} < 1$$

* اضرب المعادلة بـ a_{11}

$$a_{12} + a_{13} < a_{11} \quad (1)$$

$$|a_{21}| + |a_{23}| < |a_{22}| \quad (2)$$

$$|a_{31}| + |a_{32}| < a_{33} \quad (3)$$

كل اكيد اي ميكان بهالصفة موجهم اي بعلاقة هو هذول ال ٣ نقاط واي معناهم انه انت بتختار معادلة لـ x_1 اي يكون فيها معامل x_1 اكبر من معامل x_2 و x_3
وبتختار معادلة x_2 اي يكون فيها معامل x_2 اكبر من معامل x_1 و x_3
وبتختار معادلة x_3 اي يكون فيها معامل x_3 اكبر من x_2 و x_1

كيف يعني؟ تابع Ex

Scanned with CamScanner

Sol :.

$$X_{1\,i+1} = \frac{11 + 2X_i - X_{3i}}{6}$$

$$X_{2\,i+1} = \frac{5 + 2X_{1,i+1} - 2X_{3i}}{7}$$

$$X_{3\,i+1} = \frac{-1 - X_{1,i+1} - 2X_{2,i+1}}{-5}$$

فرق بينها وبين الـ Jacobian موضوع الـ i+1 والـ i

① $i = 0$ اول إتيريشن

$$X_{1,1} = \frac{11 + 2X_0 - 0}{6} = 1.834$$

iteration 1

$$X_{2,1} = \frac{5 + 2(1.834) - 2*0}{7} = 1.239$$

$$X_{3,1} = \frac{-1 - 1.834 - 2(1.239)}{-5} = 1.069$$

* باجاكوبيان ما بنحتاج على الأرقام اللي طلعت هي لـ: X_1 و X_2 و X_3 بدل X_{10}، X_{20}، X_{30} وبعدها كمان iteration بالقيم الجديدة X_1، X_2، X_3 فوجود الحل بالدوسيك كليك.

اكمل الحل :-

$$\epsilon = \left|\frac{\text{القديم} - \text{الجديد}}{\text{الجديد}}\right| * 100\%$$

ϵ for X_1 = 100%.

ϵ for X_2 = 100 %.

ϵ for X_3 = 100 %.

Scanned with CamScanner

② iteration 2 i = 1

* الطريقة نوعًا ما بطيئة بس بالكمبيوتر بطيئة وليست بحاجة لتدخل البشر

$$X_{1,2} = \frac{11 + (2*1.239) - 1.062}{6} = 2.07$$

$$X_{2,2} = \frac{5 + (2*2.07) - 2*1.062}{7} = 1.002$$

$$X_{3,2} = \frac{-1 - 2.07 - 2*1.002}{-5} = 1.015$$

$$\epsilon \text{ for } X_1 = \frac{2.07 - 1.834}{2.07} * 100\% = 11.4\%$$

$$\epsilon \text{ for } X_2 = \frac{1.002 - 1.239}{1.002} * 100\% = 23.65\%$$

$$\epsilon \text{ for } X_3 = \frac{1.015 - 1.062}{1.015} * 100\% = 4.631\%$$

وبكمل كمان اوصل لـ Error اقل من 0.1% مكتوبين بجدول بالدوسي.

بس الخطوة دي بتطلع $X_1 = 2$ ، $X_2 = 1$ ، $X_3 = 1$ سيب الخطأ لازم تكون للثلاث اقل من 0.1% ارجع شوف الـ table وكمل حل.

Scanned with CamScanner

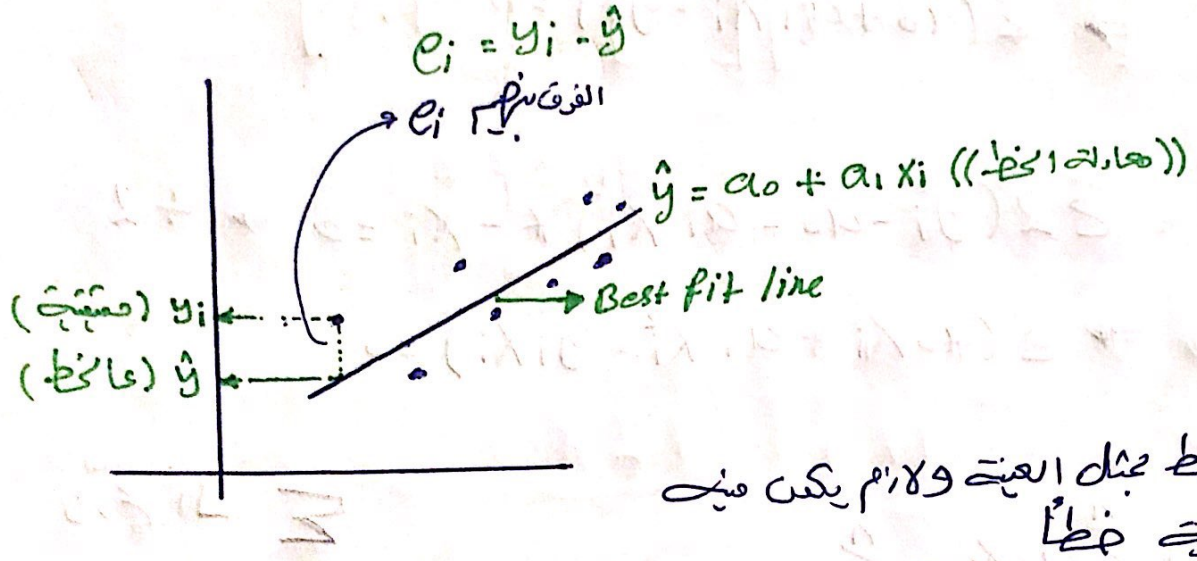
* السؤال نفسه محلول بالدوسية بطريقة Jacobian
وأخذ 9 iterations

So: Gauss Seidel is much more faster than Jacobian

- بالبرمجة Jacobi أسهل بالشغل والكمبيوتر..

Scanned with CamScanner

Curve Fitting



* بدنا خط يمثل العينة والارقام يكون فيه اقل شيء خطأ

$\sum e_i$: اي هو انك تجمع الـ Error السالب الى الموجب وبلغوا بعض رح يعطيك انطباع انه الـ curve حيث كويس وهو سيء

$\sum |e_i|$:- تاخذ المطلق للـ Error وتجمعهم كل بعض بوقوا سيء، لانه بيعطيك انطباع انه الـ curve جداً سيء

و $Sr = (\sum e_i^2)_{min}$

الحقيقية ← البيانات خاطئ

$Sr = \sum (y_i - \hat{y})^2_{min}$

$Sr = \sum (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2_{min}$

* عشان نطلع اي مشتق لازم Function يكون (minimum) Peak ونساوي بالصفر.

* نشتق بين مرة بالنسبة لـ a_0 ومرة بالنسبة لـ a_1

$\therefore \frac{dSr}{da_0} = 0 \quad , \quad \frac{dSr}{da_1} = 0$

Scanned with CamScanner

$$\frac{dsr}{da_0} = \Sigma 2(y_i - a_0 - a_1 x_i) * -1 = 0 \rightarrow \div 2$$

$$\Rightarrow \Sigma(a_0 + a_1 x_i - y_i) = 0$$

$$\frac{dsr}{da_1} = \Sigma 2(y_i - a_0 - a_1 x_i) * -x_i = 0 \rightarrow \div 2$$

$$\Rightarrow \Sigma(a_0 x_i + a_1 x_i^2 - y_i x_i) = 0$$

وزّع الـ Σ

$$\sum_{i=1}^{n} a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0$$ ← المعادلة الأولى بعد التبسيط

$$\sum_{i=1}^{n} a_0 x_i + \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = 0$$ ← المعادلة الثانية بعد التبسيط

$a_0 n + a_1 \Sigma x_i = \Sigma y_i \rightarrow ①$

(n ← عدد العناصر، Σx_i ← رقم، Σy_i ← رقم)

لما يكون الـ x رقم ثابت هيك بصير

$$a_0 \Sigma x_i + a_1 \Sigma x_i^2 = \Sigma x_i y_i \rightarrow ②$$

* حوّل المعادلتين الى ماتركس

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_i y_i \end{bmatrix}$$

كل الحكي اللي قبل الماتركس ما بهمك؟
١ حفظ الماتركس
المهم اني كل الشغل عليها.

Scanned with CamScanner

يعني ما في داعي توسع العلاقة من ، غير خوف
بالحاتركس واعرف العلاقة .

* طريقة الـ a_0 والـ a_1 بطلعلي عدادين نخطهم بهاي
المعادلة اللي تمثلي علاقة بين قيم X وقيم Y

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x_i$$

Example :- using Linear Regression, fit the following Data to a Streight line.

X	2	3.25	5.1
y	3.5	5.6	7.8

← n = عدد العينات = 3

* خلينا عالصفرة مباشرة .

Sol $n = 3$,

$$\Sigma x_i = 2 + 3.25 + 5.1 = 10.35$$

$$\Sigma x_i^2 = 2^2 + 3.25^2 + 5.1^2 = 40.57$$

$$\Sigma y_i = 3.5 + 5.6 + 7.8 = 16.9$$

$$\Sigma x_i y_i = (2 * 3.5) + (3.25 * 5.6) + (5.1 * 7.8)$$
$$= 64.98$$

Scanned with CamScanner

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 10.35 \\ 10.35 & 40.57 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16.9 \\ 64.98 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 0.897 \quad , \quad a_1 = 1.372$$

$$\Rightarrow y = a_0 + a_1 X$$

$$y = 0.897 + 1.372 X$$

هاي هي العلاقة

* بالامتحان ممكن يطلبولك الحل لما تكون $X = 19$ مثلاً اعملك الـ19 وعوضها بالعادلة طلع معك قيمة لازم تها أو عكسها (عوضتها)

---

* اما علينا واستغلنا على اساس انه هاذ خط مستقيم، افرض انه رسمة النقاط مابيطلع خط مستقيم ومن لوانك طلعت Best fit ممكن يكون لايمثلهم لذلك في Test رح نعمل عشان نعرف هل النقاط فعلاً الي بمثلهم خط مستقيم أو نوع كيوف ثاني من الانواع الي رح ناخذها

Scanned with CamScanner

Correlation Cofficent of factor R:

→ used to test the goodness of the Proposed fit

$$R^2 = \frac{St - Sr}{St}$$

$$R = \sqrt{R^2}$$

→ General

* تتكون R لما يبقى St = Sr

St : Co-variance

Sr : $\sum e_i^2$; Sr : total Error

Notes :-

لما يبقى مجموع الـ Error عندي = صفر معناها R = 1

[1] if R = 1, the Proposed fit is said to be Exact (then, the line will Pass through all the given Data Points)

[2] As R approaches 1, the fit is Refered to as Excelent — النقاط تمثل خط مستقيم

[3] As R approaches 0, the fit is refered to as Poor → معناته العلاقة مش خطية لكن فيه علاقة بين x, y

[4] if R = 0, X and y are Independent

لا يوجد أي علاقة بين x, y أبدًا.

Scanned with CamScanner

For linear Regression R is given by:-

$$R = \frac{n\Sigma xy - \Sigma x \Sigma y}{\sqrt{n*\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}\sqrt{n*\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

هاي الخطوة بتاي عليها، اتأكد قبل العضوية.

* اذا $R = 0$ او ≈ 0 ما بروح العضوية.

* بدي ارجع اصل سؤال المحاضرة الماضية بين امضى بالاول وبناءً على قيمة R بقرر.

For Previous Example :-

الحل $n = 3$ ، $\Sigma x = 10.35$ ، $\Sigma x^2 = 40.57$

$\Sigma y = 16.9$ ، $\Sigma xy = 64.98$ ، $\Sigma y^2 = 3.5^2 + 5.6^2 + 7.8^2$
$= 104.45$

$$R = \frac{3 * 64.98 - (10.35)(16.9)}{\sqrt{3(40.57) - (10.75)^2}\sqrt{3(104.45) - (16.9)^2}}$$

$= 0.995 \approx 1 \rightarrow$ العلاقة (Excellent)

يعني بنفع اقدم العضوية بعين كل حد زي المحاضرة الماضية.

Scanned with CamScanner

*) بدي اشوف انواع تانية للكيرفات هـا.

Data Linearization : يعني تخليهم linear

1 Power

$y = \alpha X^{\beta}$ ← الصيغة العامة (المجاهيل α , β)

بدي اصول الصيغة لشكل مشابه للخط المستقيم حتى اقدر اطبق عليه الصيغة.

خذ Ln للطرفين

$Ln\ y = Ln(\alpha X^{\beta})$

$Ln\ y = Ln\alpha + \beta \ln X$ ← بدي اكافئ هاي المعادلة لمعادلة خط مستقيم

$Ln\ y$: y^* ، $Ln\alpha$: a_0 (رقم ثابت) ، β : a_1 (رقم ثابت) ، $\ln X$: X^*

$y^* = a_0 + a_1 X^*$

2 Exponential

$y = \alpha e^{\beta X}$

$Ln\ y = \ln\alpha + X\beta \ln e$ ← نفس الفكرة.

$Ln\ y = Ln\alpha + \beta X$

$Ln\ y$: y^* ، $Ln\alpha$: a_0 ، β : a_1 ، X : X^*

$y^* = a_0 + a_1 X^*$

Scanned with CamScanner

13 Growth Rate

$$y = \frac{\alpha X}{\beta + X}$$ ← ⊛ أول اشيا باخد المقلوب

$$\Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{\beta + X}{\alpha X}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{\beta}{\alpha X} + \frac{X}{\alpha X}$$

⊛ الكود دائماً بيعطيلي العلامة واسئ مطلوب منك مطلع الجاهل؟ الا في حالة الحفل

$$\Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} * \frac{1}{X}$$

$$\overset{*}{y} = a_0 + a_1 \overset{*}{X}$$

Example: using linear Regression to find the Values of α and β, for the following Relation

$$y = \alpha e^{\beta X^2}$$

X	2	3	5
y	4.9	8.7	13.5

Scanned with CamScanner

Solution :

$$y = \alpha e^{\beta X^2}$$

$$\ln y = \ln \alpha + \ln e^{\beta X^2}$$

$$\ln y = \ln \alpha + \beta X^2$$

$$\overset{*}{y} = a_0 + a_1 \overset{*}{X}$$

⊛ $\overset{*}{X} = X^2$

⊛ $\overset{*}{y} = \ln y$

عدل البيانات .

$\overset{*}{X} = X^2$	4	9	25
$\overset{*}{y} = \ln y$	1.5892	2.1633	2.6026

⊛ ماي داي حسب R فلعه مباشرة طبق حالة كس يلا
لهون اكيد رح يكون linear

$$n = 3 \;,\; \Sigma \overset{*}{X} = 38 \;,\; \Sigma \overset{*}{X}^2 = 722$$

$$\Sigma \overset{*}{y} = 6.3551 \;,\; \Sigma \overset{*}{X}\overset{*}{y} = 90.8915$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 38 \\ 38 & 722 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.3551 \\ 90.8915 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 1.5713 \;,\; a_1 = 0.0431$$

$$\ln \alpha = a_0 \rightarrow \alpha = e^{a_0} = e^{1.5713} = 4.8129$$

$$\beta = a_1 = 0.0431$$

1. $y = 4.819\, e^{0.0431 X^2}$

Scanned with CamScanner

⊛ Polynomial Regression :-

- Given n-Data Points to be fitted to M^{th} order Polynomial of the form :-

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x^2 + \cdots + a_M x^M$$

* العلاقة العامة بين y و $x, x^2 \cdots x^M$

- The Resulting System using Polynomial Regression will Be :-

⊛ لاحظ التعميم حالة خاصة من المعادلة : هاي الـ General

عدد العينات ←

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x & \Sigma x^2 & \cdots & \Sigma x^M \\ \Sigma x & \Sigma x^2 & \Sigma x^3 & \cdots & \Sigma x^{M+1} \\ \Sigma x^2 & - & - & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ \Sigma x^M & \Sigma x^{M+1} & \Sigma x^{M+2} & \cdots & \Sigma x^{2M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y \\ \Sigma xy \\ \vdots \\ \Sigma x^M y \end{bmatrix}$$

⊛ بطلع $a_0, a_1, a_2 \cdots a_M$ عن طريق المصفوفة .

⊛ لو عندك 2nd order رح تطلع معك المصفوفة 3X3 بتطلع 3rd order لو 4X4

⊛ اكبر أسس بيمثل M ← كيفيات حسول ؛ كام جايين من الـ General

$y = 1 \rightarrow M = 0$

$y = x^2 - 1 \rightarrow M = 2$

$y = x^3 + 2x \rightarrow M = 3$

⊛ لو السؤال حكالك 3rd order بدك تعرف حكالك المعادلة هيك

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

المجاهيل ؛ a_0, a_1, a_2, a_3 ؛ الثوابت علاقة بين x و y ؛

Scanned with CamScanner

* For Polynomial Regression :

$$n \geq (M+1)$$

* لازم يكون عندك عدد العينات اكبر او يساوي $M+1$ حتى اعرف اكبر أس تعوض ترسم لوبون

* كل ما زاد عدد العينات زادت الدقة

* مهم جداً :: عدد المتغيرات اي بتعطيها داتا عددها n بتكون $n-1$

Example using Regression Analysis the 2nd order Polynomial Coefficents using the following Data Points are?

x	2	3.25	4	5
y	5	9	7	4.25

→ عدد النقاط كافي لحل ال 2nd order

$n = 4 \geq 2$

* صيغة المعادلة راح تكون :

$$((y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2)) \rightarrow \text{order } 2^{nd}$$

Sol

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x & \Sigma x^2 \\ \Sigma x & \Sigma x^2 & \Sigma x^3 \\ \Sigma x^2 & \Sigma x^3 & \Sigma x^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y \\ \Sigma xy \\ \Sigma x^2 y \end{bmatrix}$$

(M, M+1, 2M)

Scanned with CamScanner

$n = 4$, $\bar{X} = 14.25$, $\sum X^2 = 55.56$

ربع كل وحدة بعدين اجمعهم

$\sum X^3 = 231.33$ كعب كل الارقام واجمع ، $\sum X^4 = 1008.57$

$\sum y = 25.25$ ، $\sum XY = 88.5$ ← اضرب بعدين اجمع

$\sum X^2 y = 333.31$ ← ربع بعدين اضرب بـ y بعدين اجمع .

- حوّلها بالمصفوفة :-

$$\begin{bmatrix} 4 & 14.25 & 55.56 \\ 14.25 & 55.56 & 231.33 \\ 55.56 & 231.33 & 1008.57 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25.25 \\ 88.5 \\ 333.31 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow a_0 = -11.59$, $a_1 = 11.8$, $a_3 = -1.73$

$\Rightarrow y = -11.59 + 11.8X - 1.73X^2$

لو طلع اوجد معدة $X = 4.5$ عوضها بالمعادلة.

Scanned with CamScanner

* multiple linear Regression :. النوع من الخطيات

$$y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 \dots + a_n X_n$$

مجاهيل .

$X_1, X_2, X_3 \dots X_n$: All are Independent.

for $y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2$ → متغيرين زيادة

The Regression Coefficients can be calculated using the following system :-

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma X_1 & \Sigma X_2 \\ \Sigma X_1 & \Sigma X_1^2 & \Sigma X_1 X_2 \\ \Sigma X_2 & \Sigma X_1 X_2 & \Sigma X_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y \\ \Sigma X_1 y \\ \Sigma X_2 y \end{bmatrix}$$

هاي المصفوفة لمتغيرين فقط وهي صفر لو بده يجيلك اكثر من متغيرين رح نعطيك المصفوفة بالامتحان.

Example :. Calculate $[a_0, a_1, a_2]$ for $y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2$ using the following Data Points.

X_1	1	1	2
X_2	2	3	2
y	2	5	9

* نختلف عن اللي اخذناهم قبل بانه منطيك قيم لـ X_1 ، X_2 ، y واعطاك بس داتا لـ X وهة منفك رجع لاسوال زي قبل

Scanned with CamScanner

$n = 3$, $\Sigma X_1 = 4$, $\Sigma X_2 = 7$

$\Sigma X_1^2 = 6$, $\Sigma X_1 X_2 = 9$, $\Sigma X_2^2 = 17$

$\Sigma y = 16$, $\Sigma X_1 y = 25$, $\Sigma X_2 y = 37$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 4 & 6 & 9 \\ 7 & 9 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 25 \\ 37 \end{bmatrix}$$

$a_0 = -11$, $a_1 = 7$, $a_2 = 3$

So:- $y = -11 + 7X_1 + 3X_2$

⊗ لو طلب منك y لما $X_1 = 1.5$ و X_2 مرضاً كان 1.5 بحسبهم وبعوضهم وطلع قيمة y

CH 18 — Interpolation Polynomical

*) رح نتعلم كيف نعمل (interpolation) بين طريقتين اوسع من اني بعرفها . اني بعرفها كانت لل linear هون شو ما كان الاقتران.

- Given a set of (n+1) Data Points is used to create an nth order interpolating which passes through all given Data Points, and can be used to Predict the behaviar of $f(x)$ within the interval $[X_0, X_n]$

II Newton Divided Difference (NDD)

اول طريقتين في ايجاد Interpolation

- The General formula for nth order

- NDD interpolating Polynomical is given by :-

(given in question, (second order, third order...))

$$f_n(X) = b_0 + b_1(X_1 - X_0) + b_2(X - X_0)(X - X_1) + b_3(X - X_0)(X - X_1)(X - X_2) \dots + b_n(X - X_0)(X - X_1) \dots (X - X_n)$$

($f(x)$ مجهولة)

* $X_0, X_1, X_2 \dots$ قيم معطاة في السؤال للتقاط .

$b_0, b_1, b_2 \dots b_n$ are called NDD

* $b_0, b_1, b_2 \dots b_n$ قيم مجهولة بدي اطلعهم من خلال table .

وارجع اعوضهم بالمعادلة واوجد $f(x)$ للـ x اني بدي اياها .

Scanned with CamScanner

* Calculating the Divided Difference by:.

x_i	$f(x_i)$	$1^{st} f(x_{i+1}, x_i)$	$2^{nd} f(x_{i+2}, x_{i+1}, x_i)$	$3^{rd} f(x_{i+3}, x_{i+2}, x_{i+1}, x$
x_0	y_0 (b0)	$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ (b1)	$\frac{f(x_2, x_1) - f(x_1, x_0)}{x_2 - x_0}$ (b2)	$\frac{f(x_3, x_2, x_1) - f(x_2, x_1, x_0)}{x_3 - x_0}$ (b3)
x_1	y_1	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$\frac{f(x_3, x_2) - f(x_2, x_1)}{x_3 - x_1}$	
x_2	y_2	$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$		
x_3	y_3			

⊛ Example ; using NDD interpolating polynomials estimate $f_3(2.75)$ using the following Data Points

L 3rd order

⊛ بده جودة الـ 2.75

X	x_0 0	x_1 1	x_2 2.5	x_3 3
y	2	5	9	11

?

⊛ في حل جودة الـ (2.5) (ميت موجودة بالجدول يعني) مش داعي انك تحل يعني ؛ كان السؤال بس لتضييع الوقت ؛ تأكد انه الميت اللي بيسألك عنها موجودة بالجدول اعطها او لأ.

Scanned with CamScanner

Solution

* مرات ممكن يعطيك هذا الـ table ↓ ويكون فيه قيم فاضيه بدك تعرف اسمه كامل مربطين وبتقدر تطلع اي اشي ما اي اشي.

x_i	y_i	1^{st}	2^{nd}	3^{rd}
0	2	$\frac{5-2}{1-0} = 3$	$\frac{2.667-3}{2.5-0} = -0.1332$	$\frac{0.6665-(-0.1332)}{3-0} = 0.267$
1	5	$\frac{9-5}{2.5-1} = 2.667$	$\frac{4-2.667}{3-1} = 0.6665$	
2.5	9	$\frac{11-9}{3-2.5} = 4$		
3	11			

* اول رقم هو قيم الـ b

So: $\boxed{b_0 = 2}$, $\boxed{b_1 = 3}$, $\boxed{b_2 = -0.1332}$, $\boxed{b_3 = 0.267}$

$$\therefore F_n(X) = b_0 + b_1(X - X_0) + b_2(X - X_0)(X - X_1) + b_3(X - X_0)(X - X_1)(X - X_2)$$

* بوقف كما هاي عين (n-1) الـ order يعني $2 = (3-1)$

$$F_3(2.75) = 2 + 3(X-0) + -0.1332(X-0)(X-1) + 0.267(X-0)(X-1)(X-2.5)$$

* وفي بدل $X = 2.75$

$$\boxed{F_3(2.75) = 9.432}$$

* في مثال حاضل معك وقت بالامتحان اعمل interpolation عادي ، بطلع معك جواب كيف قديش ، هذا السؤال بطلع !!

Scanned with CamScanner

[2] Lagrage Interpolation Polynomial :

it's Defined by :-

$$F_n(x) = \sum_{j=0}^{n} L_i f(x_i)$$

L_i ith lagrage Polynomial and its Defined as :

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

* Example using the Data given in the Previous Example, estimate $F_3(2.75)$ using lagrage interpolating Polynomial ?

x	x_0	x_1	x_2	x_3
y	2	5	9	11

Scanned with CamScanner

Solution :

① اول اشي طلع معادلات لاغراج لكل مية كدا.

$$L_0 = \frac{(X-1)(X-2.5)(X-3)}{(0-1)(0-2.5)(0-3)} \quad , \quad X = 2.75 \text{ حيث}$$

$$\boxed{L_0 = 0.0145}$$

$$L_1 = \frac{(X-0)(X-2.5)(X-3)}{(1-0)(1-2.5)(1-3)} \quad , \quad X = 2.75$$

$$\boxed{L_1 = -0.0572}$$

$$L_2 = \frac{(X-0)(X-1)(X-3)}{(2.5)(2.5-1)(2.5-3)} \quad , \quad X = 2.75$$

$$\boxed{L_2 = 0.6416}$$

$$L_3 = \frac{(X-0)(X-1)(X-2.5)}{(3-0)(3-1)(3-2.5)} \quad , \quad X = 2.75$$

$$\boxed{L_3 = 0.4014}$$

Scanned with CamScanner

$$F_3(2.75) = (0.0145 * 2) - (0.0572 * 5) + (0.6416 * 9) + (0.4010 * 11)$$

(0.0145: L_0; 2: $F(x_0)$; 0.0572: L_1; 5: $F(x_1)$; 0.6416: L_2; 9: $F(x_2)$; 0.4010: L_3; 11: $F(x_3)$)

$$\boxed{F_3(2.75) = 9.9284}$$

ملاحظة: لازم يطلع الجواب مطابق لجواب الـ NDD .

* ومعنى بين يطوا الموضوعين ببعض

$$9.9284 = b_0 + b_1(x - x_0) \cdots$$

(9.9284: Lagrange في؛ $b_0 + b_1(x - x_0) \cdots$: NDD الـ Terms)

ممكن يعطيك كل اشي وتنسى b_0 وياها فاكر انك نكون عارف انه الـ Lagrange دائماً مطابق لـ NDD

Note: for agiven set of Data Points;

- The Resulting interPolating Polynomial will be unique (NDD and lagraye), interPolating Polynomials are equivalent if the Same Data Points are used to create them.

لا غراض .

$$F_3(x) = L_0 F(x_0) + L_1 F(x_1) + \cdots$$

$$F_3(x) = b_0 + b_1(x - x_0) \cdots \quad \text{NDD}$$

* كل واحد مكانه، لكن اي مبالي

Scanned with CamScanner

* المشتقات

1] Equal Spaced Data

$$F(X_{i+1}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{j}(x_i)\,(X_{i+1} - X_i)^{j}}{j!}$$

Final

$$(X_{i+1} - X_i) = h \;;\; (\text{step size})$$

x) لو بدي اخذ Two terms من القانون بصير هيك :

$$F(X_{i+1}) = F(X_i) + F'(X_i)\,h + \sum_{j=2}^{\infty} \square$$

$$\underline{F'(X_i)} = \frac{F(X_{i+1}) - F(X_i)}{h} - \frac{\sum_{j=2}^{\infty} \square}{h}$$

- $F'(X_i)$: له اشتقة الاولى
- $F(X_{i+1}) - F(X_i)$: صورة النقطة نفسها ؛ صورة نقطة بعدها
- h: Step size
- $\sum_{j=2}^{\infty} \square$: هذا اسمه $o(h)$ وهو مقدار الـ terms اللي ماخدتهم وهو يمثل مقدار الخطأ اللي عندي (نسبة الخطأ)

⊛ اذا قللت الـ Step size بصير ادق.

⊛ ايضاً اذا خدت terms اكثر بصير أدق.

$$\underline{\underline{F'(X_i)}} = \frac{F(X_{i+1}) - F(X_i)}{h} + o(h)$$

- $o(h)$ ← دقة قليلة
- $o(h)^2$ ← مقدار خطأ متوسط ودقة متوسطة
- $o(h)^4$ ← مقدار خطأ قليل ودقة عالية

بالامتحان في Table للاقترانات جاي.

Scanned with CamScanner

- other Derivatives can be Defined in a similar using TS expansions :-

The Resulting formulas are given in tables ;-

* Figure 1 , Page 633 → forword Difference
يعني عندك نقطة ونقطة بعدها وهودة النقطة نفسها

* Figure 2; Page 634 → Backword Difference
يعني عندك نقطة ونقطة قبلها وهودة النقطة نفسها

* Figure 3; Page 634 → Centered Difference
عندك نقطة قبل ونقطة بعد وما عندك النقطة نفسها

Ex ; using the following Data ;

a) estimate $F''(2.25)$ using Centered Difference with $O(h)^2$ accuracy .

٣ معلومات مهمة حتى اعرف منين الـ table واجي
الاقي ان :
- الدقة المطلوبة
- الطريقة المطلوبة
- الدقة المطلوبة .

b) estimate $F'(2)$ using Centered Difference with $O(h)^2$ accuracy and $(h = 0.5)$ → هو معك

	x_{i-3}	x_{i-2}	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	x_{i+2}	x_{i+3}
X	1.5	1.75	2	2.25	2.5	2.75	3
F(x)	2	4.5	7.25	9.15	12	14.25	15

* ملاحظة : لو السؤال ما عندك بالطريقة اللي تشتغل منها اشتغل على الـ Centered لأنها اذق وحدة منهم .

* الـ step size بأول فرع هو (0.25) : الفرق بين أي إكسين وراء بعض

Scanned with CamScanner

Solution :

a) روح على الـ Table وشوف Centered بتع $O(h)^2$ و

$$\Rightarrow F''(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_i - 1) - f(x_i - 2)}{12h^2}$$

$$F''(2.25) = \frac{-14.25 + 16*12 - 30*9.15 + 16*7.25 - 4.5}{12 * 0.25^2}$$

$$F''(2.25) = 19.6$$

* ممكن يعطيك اقتران وانت تحط قيم لـ X فبالتالي :

$$F(X) = X^2 - 1$$

Step size = 0.15

Find $F''(1.5)$ By Backword Difference.

صورة بعتي بعد النقطة ← صورة بعتي قبل النقطة

(b) $$F'(x_i) = \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i - 1)}{2h}$$

* بدك تاخد الـ Data حسب الـ Step size اللي عم بدل فيها

$h = 0.5$

	$x_i - 0.5$ ←	x_i →	$x_i + 0.5$
X	1.5	2	2.5
F(X)	2	7.25	12

$$F'(2) = \frac{12 - 2}{2 * 0.5} = 10$$

Scanned with CamScanner

* في حال سؤال اجا، جابلهم ٣ قوانين وسأل:
هذا Forward او Backword او Centered ؟

بدك تميز حسب الـ Data اي معك؛ اذا معطيك بالقانون

قيم بعد Xi ← Forword

اذا قيم قبلها ← Backword

اذا موجود قيم بعدها وقبلها والنقطة نفسها مش موجودة ← Centered

Ex: Estimate $F''(0.5)$ for $f(x) = \cos^2(x)$, using Forword Difference with $o(h)$ accuracy and $h = 0.15$?

Solution:

From table $\Rightarrow F''(x_i) = \dfrac{F(x_i+2) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$

* بدك تعمل اتت الـ Data تبعاتاً كل الامتران اي معك واد Step Size

	x_i	x_{i+1} $0.5+0.15$	x_{i+2} $0.65+0.15$
X	0.5	0.65	0.8
F(X)	0.7701	0.6337	0.4854

* على التيبل هيك لانه بدي forword بيخ قيم بعدها.

0.5 صورة الشغل
$\cos^2(0.5) = 0.7701$

$$F''(0.5) = \frac{0.4854 - 2*0.6337 + 0.7701}{0.15^2} = -0.528$$

* اذا ما عندك الشغل على الـ forword ا (او) Centered

Scanned with CamScanner

Unequally Spaced Data :.

use Given Data to create an interpolating Polynomial, then use it's Derivatives to estimate the Required Derivatives

Ex Estimate $f'(2.25)$ using the following Data:

X	1	2.25	3	?
F(x)	2	7	9	

*) الفكرة انه اذ Step Size مش ثابتة ؛ كما شوفنا قبل لا فورورد ولا باكوورد ولا اشي بينفع

Sol : $F'(x)$ بدها $F(x)$ واطلع NDD اشتغل على اد

عندي ٣ متغيرات اكثر اشي بقدر اعمله Second order بالامتحان ممكن يكون عندك ١٠ نقاط هو بيكلك عدد النقاط اللي بدك اياها ؛ لو 4th order ← F_3 3rd order او بالامتحان بيكلك

Sol

x_i	$F(x_i)$	1st	2nd
1	2	$\frac{7-2}{2.25-1}=4$	$\frac{2.6667-4}{3-1}=-0.66665$
2.25	7	$\frac{9-7}{3-2.25}=2.6667$	
3	9		

So $F(x) = 2 + 4(X-1) - 0.66665(X-1)(X-2.25)$

فكرهم واحفظ

Scanned with CamScanner

أكمل الحل :

$$(x) = 4 - 0.66665\,(X-1 + X - 2.25)$$

$$F'(x) = 4 - 0.66665\,(2X - 3.25)$$

$$F'(2.25) = 4 - 0.66665\,(2*2.25 - 3.25)$$

$$F'(2.25) = 3.166$$

* لو طلب F'' اشتق F'

Scanned with CamScanner

21 Numerical integration :-

- Numerical integration methods :-

equally Spaced Data

[1] Trapezoidal Rule

[2] Simpson's Rules

A] $\frac{1}{3}$ Simpson's Rule

B] $\frac{3}{8}$ Simpson's Rule.

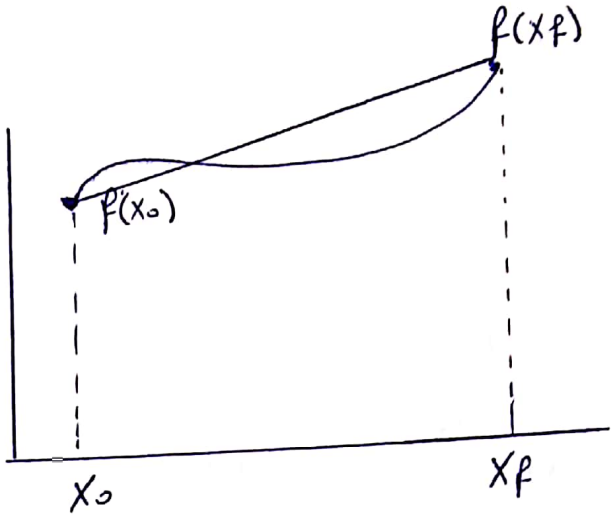
Scanned with CamScanner

1 Trapizoidal Rule

اول طريقة للتكامل باستخدام التحليل العددي.

*) Assume a linear function, to Represent the function over the interval (X_0, X_f)

$$I = \int_{X_0}^{X_f} f(x) \cdot dx$$



وصلت بخط مستقيم بين $f(X_0)$ و $f(X_f)$ وبدي احسب المساحة.

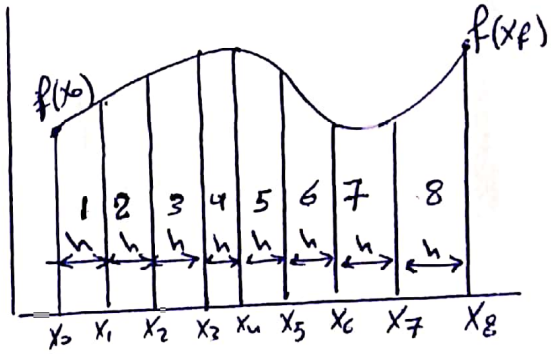
مساحة شبه المنحرف = مجموع القاعدتين / 2 * الارتفاع

$$I = \int_{X_0}^{X_f} f(x) \cdot dx = \frac{1}{2} \left(f(X_0) + f(X_f)\right) * (X_f - X_0)$$

*) عشان اكون أدق؛ قسم الشكل الى ترابازويدلز.

n = عدد المساحات = 8

الـ h الفرق بين اي تقطيعين ورا بعض ولازم يكونو متساويات



$$I = \sum_{i=0}^{n} I_i \quad , \quad h = \frac{X_f - X_i}{n}$$

Scanned with CamScanner

I for the first Area $= \frac{1}{2}(f(x_0)+f(x_1))*h$

I " " Second " $= \frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))*h$

⋮

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \dots + I_8$$

* لنفرض انهم كانوا 5 مساحات مثلاً ∴ 8

$$I = \frac{h}{2}(f(x_0)+f(x_1)) + \frac{h}{2}(f(x_1)+f(x_2)) + \frac{h}{2}(f(x_2)+f(x_3))$$
$$+ \frac{h}{2}(f(x_3)+f(x_4)) + \frac{h}{2}(f(x_4)+f(x_5))$$

$$= \left(\frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right)\right)$$

$\longrightarrow x_0=1,\ x_1=2,\ x_2=3,\ x_3=4,\ h=1$

Ex $\int_1^4 e^{2x}\,dx$

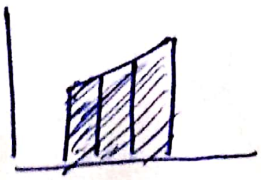
$$= \frac{1}{2}\left(e^2 + 2\sum_{i=1}^{3-1=2} f(x_i) + e^8\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^2 + 2(e^4+e^6) + e^8\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^2 + 2e^4 + 2e^6 + e^8\right)$$

* متى تكون الطريقة Exact 100% ؟ كما يكون الاقتران خطي.

يعني كما يكون الـ order تبع الاقتران الي كتبي = 1 (Linear)



Scanned with CamScanner

2] Simpson's Rules :.

A] $\frac{1}{3}$ Simpson's Rule :.

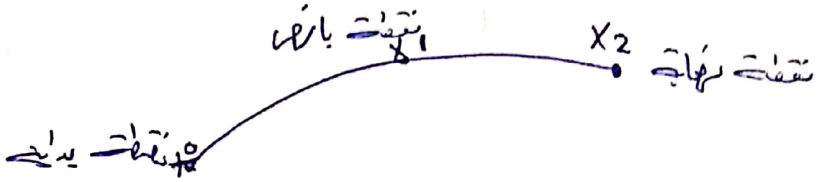
- Assume a quadratic, to approximate the function with (X_0, X_f)

$$I = \int_{X_0}^{X_f} f(x).dx$$

For Single Application: مكاملك يروح على هذا Single الفانكشن.

$n = 2$

$$h = \frac{X_f - X_0}{n}$$



$$I_{1/3} = \frac{h}{3}\left(f(X_0) + 4f(X_1) + f(X_2)\right)$$

For multiple Application: مكاملك يروح فيها $n=4$ على هذا الفانكشن

n must Be even.

$$I = \frac{h}{3}\left(f(X_0) + 2\sum_{i=2,4,6\cdots}^{n-2} f(x_i) + 4\sum_{i=1,3,5\cdots}^{n-1} f(x_i) + f(X_F)\right)$$

$f(X_0)$ لنقطة البداية — $\sum_{i=2,4,6\cdots}^{n-2}$ لجزء الاعداد الزوجية — $\sum_{i=1,3,5\cdots}^{n-1}$ لجزء الاعداد الفردية — $f(X_F)$ لنقطة النهاية (n)

Scanned with CamScanner

3/8 Simpson's Rule:

Assume a 3rd order to approximate $f(x)$

$$I = \int_{x_0}^{x_f} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_f} f_3(x)\,dx$$

For this, the minimum number of segments Required is $n = 3$

- For Single unit:

$$I_{\frac{3}{8}} = \frac{3}{8} h \left(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_f) \right)$$

$\Rightarrow$ for n intervals:

For multiple Application:

$$I_{\frac{3}{8}} = \frac{3}{8} h \left[F(x_0) + 3F(x_1) + 3F(x_2) + 2F(x_3) + 2F(x_4) + 3F(x_5) + 2F(x_6) + \cdots F(x_f) \right]$$

$$\int_1^4 e^{2x}\,dx$$

$$I = \frac{3}{8} \times 1 \left(F(1) + 3F(2) + 3F(3) + F(4) \right)$$

$$I = \frac{3}{8} \left(e^2 + 3e^4 + 3e^6 + e^8 \right)$$

Scanned with CamScanner

* ممكن بيجيلك السؤال هيك :

$$\int_{1}^{4} F(x)\,dx$$

X	0	1	2	3	4	5
F(x)	0.5	2	4	6	7	10

← ما أهم داخلي →

موضوعنا الاقتران : بأخذ الـ X والـ F من حدود التكامل والقيم والصور اللي بنأخذهم

Scanned with CamScanner

CH 25 Rung-Katta methods: * حل المعادلات التفاضلية

- used to solve ordinary Differential equations of the form:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \;,\; y(x_0) = y_0$$

1 Euler's method:

the Solution for $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ is given by as:-

$$y_{i+1} = y_i + (f(x_i, y_i)) * h$$

h ← step size

Ex estimate $y(1)$ using Euler's method for:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5x^2+1}{y} \rightarrow f(x,y) \quad , \quad y(0) = 1$$

x_0 ↓ , y_0

ⓐ When $h = 1$

ⓑ When $h = 0.5$

and calculate ϵ_T for a and b ?

ϵ_T ← True error → $\frac{\text{true value} - \text{Approximation}}{\text{True Value}} * 100\%$

Scanned with CamScanner

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5x^2+1}{y}$$

$y\,dy = (5x^2+1)*dx \rightarrow$ تكامل الطرفين

$$\frac{y^2}{2} = \frac{5x^3}{3} + x + C$$

$y(0) = 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{5*0^3}{3} + 0 + C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{5x^3}{3} + x + 0.5 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{10x^3}{3} + 2x + 1}$$

$y(1) = ?$

$$y(1) = \sqrt{\frac{10*1^3}{3} + 2*1 + 1} = 2.516$$

↳ True Value (Exact) for $y(1)$

a) $h = 1$

$$y_{i+1} = y_i + (f(x_i, y_i))*h$$

$i = 0$

$$y_1 = y_0 + (f(x_0, y_0))*h$$

↳ y_0 الي معطيا الـ Initial Condition اياها بالسؤال.

* بالسؤال ما حدك بعد اشي شين معين لذلك بدنا نعمل بس 2

Scanned with CamScanner

$$F(x_0, y_0) = f(0,1) = \frac{5*0^2+1}{1} = 1$$

y_0 , $f(x_0,y_0)$, h

$$y_1 = 1 + 1 * 1 = 2$$

$i = 1$

$$y_2 = y_1 + (f(x_1, y_1)) * h$$

$$f(x_1, y_1) = f(\underline{1}, \underline{2}) = \frac{5*1^2+1}{2} = 3$$

x_1 , y_1

step size زدت او ↓

من الاولين بيمين اي متلها

y_1 , $f(1,2)$, step size

$$y_2 = 2 + 3 * 1 = 5$$

$$\epsilon_T = \frac{5 - 2.5166}{2.5166} * 100\% \approx 100\%$$

b) $h = 0.5$

$$y_{i+1} = y_i + (f(x_i, y_i)) * h$$

$i = 0$

$$y_1 = y_0 + (f(x_0, y_0)) * h$$

$$f(x_0, y_0) = f(0,1) = 1$$

$$y_1 = 1 + 1 * 0.5 = 1.5$$

$$\epsilon_T = \frac{2.5166 - 1.5}{2.5166} * 100\% \approx 40.39\%$$

Scanned with CamScanner

$$y_2 = y_1 + (f(x_1, y_1)) * h$$

$$f(x_1, y_1) = f(0.5, 1.5) = 1.5$$

$$y_2 = \overset{\Rightarrow y_1}{1.5} + 1.5 * 0.5 = 2.25$$

$$\epsilon_T = \frac{2.5166 - 2.25}{2.5166} * 100\% = 10.38\%$$

Scanned with CamScanner

2nd order R-K

Improvement of Euler's method

ⓐ Henn's method

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) * h$$

$$K_1 = f(x_i, y_i)$$

$$K_2 = f(x_i + h, y_i + K_1 h)$$

ⓑ mid Point method

$$y_{i+1} = y_i + K_2 h$$

$$K_1 = f(x_i, y_i)$$

$$K_2 = f(x_i + 0.5h, y_i + 0.5 K_1 h)$$

الصيغ هو صفات بس لازم تعرف كل وحده لحالها عشان تكتلك امتحان

ⓒ Ralston's method

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{3}(K_1 + 2K_2) h$$

$$K_1 = f(x_i, y_i)$$

$$K_2 = f(x_i + \frac{3}{4} h, y_i + \frac{3}{4} K_1 h)$$

Scanned with CamScanner

x: estimate $y(1)$ using Henn's method for:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5x^2+1}{y} \quad , \quad y(0)=1 \quad , \quad h=0.5 \; ?$$

Sol :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)h$$

i=0

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$$

$$K_1 = f(x_0, y_0) = f(0,1)$$

$$K_1 = \frac{5*0^2+1}{1} = 1$$

$$K_2 = f(x_0+h, y_0+K_1 h)$$

$$K_2 = f(0+0.5, 1+1*0.5)$$

$$K_2 = f(\overset{x}{0.5}, \overset{y}{1.5})$$

$$K_2 = \frac{5*0.5^2+1}{1.5} = 1.5$$

$$\Rightarrow y_1 = 1 + \frac{1}{2}(1+1.5)*0.5 = 1.625$$

Scanned with CamScanner

$i = 1$

$$\Rightarrow y_2 = y_1 + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) * h$$

$\rightarrow x_0 + h = 0 + 0.5$

step size + x_0 = كم اكبر؟

y_1 ← قبل شوي خلصنا ها.

$$K_1 = f(x_1, y_1)$$

$\rightarrow 1.625$

$$K_1 = f(0.5, 1.625)$$

$$K_1 = 1.38$$

$$K_2 = f(x_1 + h, y_1 + K_1 h)$$

$$K_2 = f(0.5 + 0.5, 1.625 + 1.38 * 0.5)$$

$$K_2 = f(1, 2.315)$$

$$K_2 = 2.59$$

$$\Rightarrow y_2 = 1.625 + \frac{1}{2}(1.38 + 2.59) * 0.5$$

$$y_2 = 2.617$$

$$\epsilon_T = \left| \frac{2.5166 - 2.617}{2.5166} \right| * 100\% = 3.98\%$$

← يعني الحسابات أدق من الأول.

Scanned with CamScanner

[3] 3rd order R-K [R-K3]

∴ K_3 فيها

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(K_1 + 6K_2 + K_3)$$

$$K_1 = f(x_i, y_i)$$

$$K_2 = f(x_i + 0.5h, y_i + 0.5K_1h)$$

$$K_3 = f(x_i + h, y_i - K_1h + K_2h)$$

[4] 4th order [R-K4] → هاي بتعطيني الجواب اكو اكثر 100% يعني هذا، اكيد فيها غلط.

∴ K_4 فيها

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$K_1 = f(x_i, y_i)$$

$$K_2 = f(x_i + 0.5h, y_i + 0.5K_1h)$$

$$K_3 = f(x_i + 0.5h, y_i + 0.5K_2h)$$

$$K_4 = f(x_i + h, y_i + K_3h)$$

Scanned with CamScanner

Example using R-K4, estimate $y(1)$ for :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5x^2+1}{y}, \quad y(0)=1, \quad h=1 \ ?$$

(Exact 100%.) هي اول مرة R-K4

Sol

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

1] $i=0$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$K_1 = f(x_i, y_i) = f(x_0, y_0) = f(0,1) = 1$$

$$K_2 = f(\overset{0}{x_i} + 0.5h, \ \overset{1}{y_i} + 0.5 K_1 h) = f(0.5, 1.5) = 1.5$$

$$K_3 = f(\overset{0}{x_i} + \tfrac{1}{2}h, \ \overset{1}{y_i} + \tfrac{1}{2} K_2 h) = f(0.5, 1.75) = 1.2857$$

$$K_4 = f(\overset{0}{x_i} + h, \ \overset{1}{y_i} + K_3 h) = f(1, 2.2857) = 2.625$$

$y_1 = 2.5327 \rightarrow$ بسبب التقريب اقتلت عن القيمة الاكيد اللي (2.5166)

$$\varepsilon_T = \left| \frac{2.5166 - 2.5327}{2.5166} \right| * 100\% = 0.818\%$$

← انغلط هيك من اطريقة انغلط من التقريب المفروض اول Error هيك دائماً بنطبق القيم دائماً من اول اشي بتخلي R-K4 تعطيك جواب Exact

Scanned with CamScanner