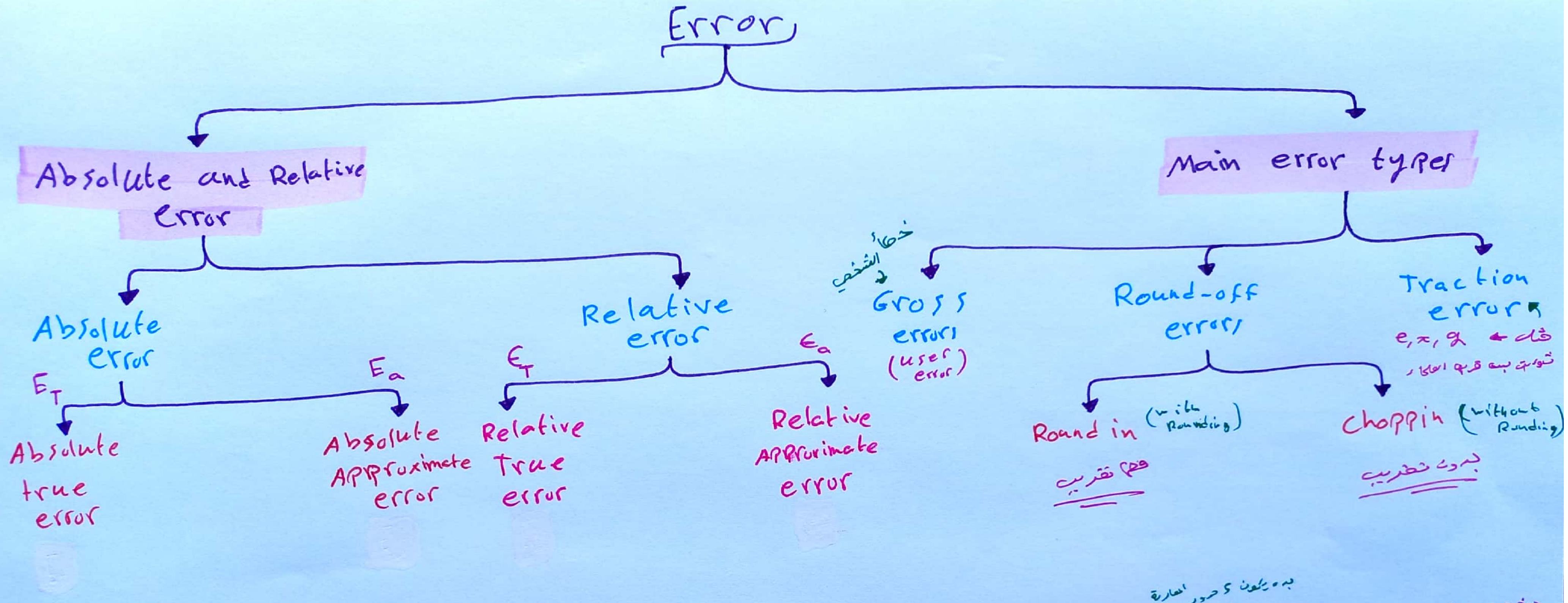
EICoM
ELECTRICAL COMPUTER MECHATRONICS

تلخيص
تحليل عددي

للطالب المبدع
محمود المجدلاني

إرادة - ثقة - تغيير



◆ $E_T = |Exact - Approx.|$

تفسيرها
Exact = True

◆ $\epsilon_T = \left|\frac{Exact - Approx.}{Exact}\right| * 100\%$

◆ $E_a = |New - old|$

◆ $\epsilon_a = \left|\frac{New - old}{New}\right| * 100\%$

Taylor series

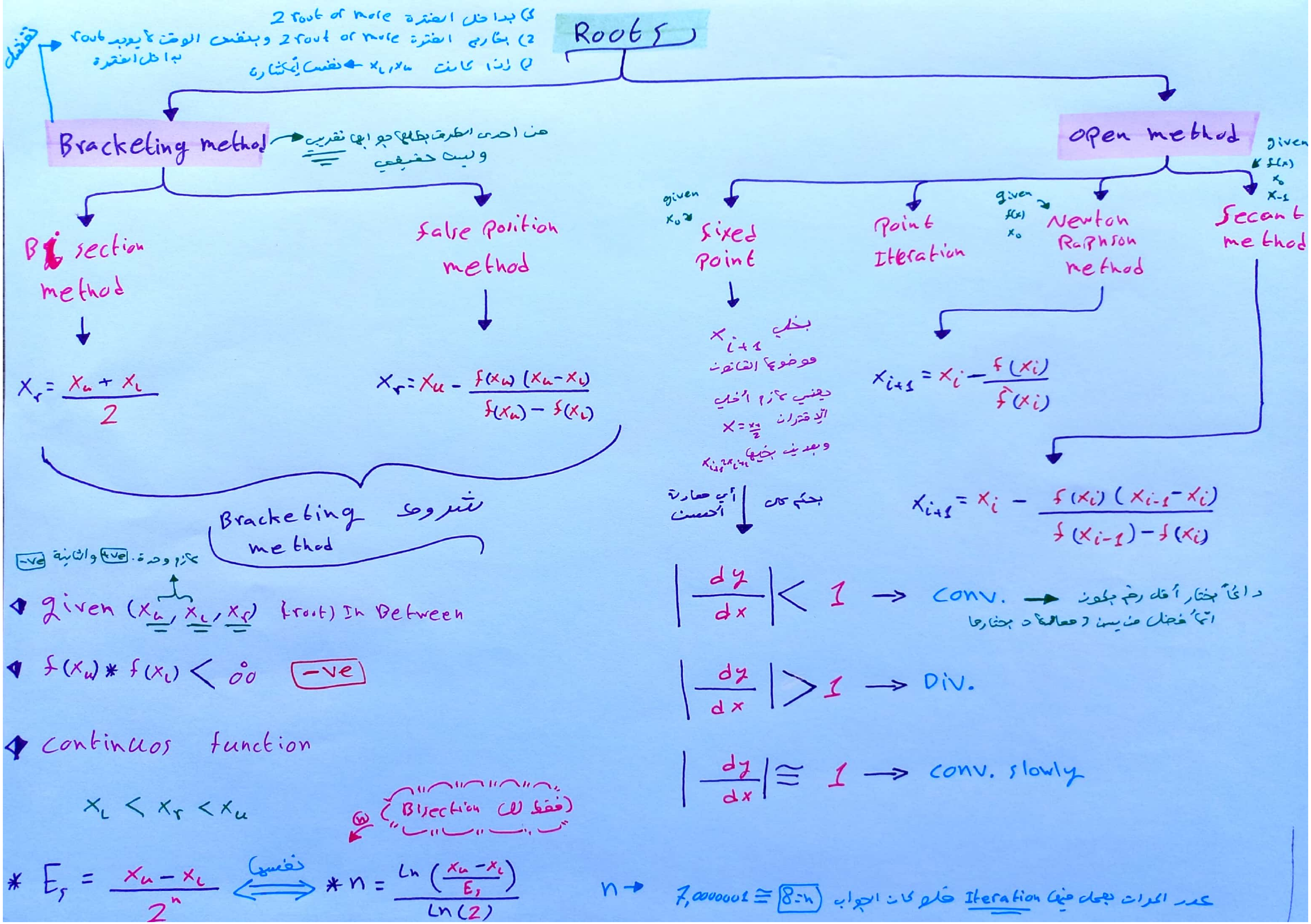
$$f(x) = \sum_{i=0}^{N} \frac{(x-x_0)^i f^{(i)}(x_0)}{i!}$$

بيكون 5 حدود المعادلة
↑ 5 trail → بنشتق 4 مرات
4 trail → هنشتق 3 مرات
عدد الحدود

* Note

certain . estimated → significant

- certain Digit → عدد الخانات الصحيحة ~~دون الأعشار~~
- estimated Digit → عدد الخانات بعد الفاصلة
- significant figures → عدد الخانات قبل وبعد الفاصلة



Roots

١) بداخل الفترة 2 root or more
٢) بخارج الفترة 2 root or more وبنفس الوقت لا يوجد root بداخل الفترة
٣) إذا كانت x_u, x_l ← نفس إشارة

تفشل

Bracketing method

← من احدى الطرق بطلع جوابها تقريبي وليس حقيقي

Bisection method

$$X_r = \frac{X_u + X_l}{2}$$

False position method

$$X_r = X_u - \frac{f(x_u)(x_u - x_l)}{f(x_u) - f(x_l)}$$

شروط Bracketing method

- given $(\underline{\underline{x_u}}, \underline{\underline{x_l}}, \underline{\underline{x_r}})$ (root) In Between

  ↑ عزو وحدة. $\boxed{+ve}$ والثانية $\boxed{-ve}$

- $f(x_u) * f(x_l) < 0$ $\boxed{-ve}$

- continuous function

$$x_l < x_r < x_u$$

(Bisection للـ فقط)

$$* \; E_r = \frac{x_u - x_l}{2^n} \xLeftrightarrow{\text{نفسها}} * \; n = \frac{\ln\left(\frac{x_u - x_l}{E_r}\right)}{\ln(2)}$$

open method

Fixed Point

given x_0

بخلي x_{i+1} موضوع القانون

يعني لازم أخلي الاقتران

$x = \frac{x_n}{2}$

وبعدين بخليها $x_{i+1} = x_{i+2}$

بحكم على ↓ أي معادلة أحسن

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| < 1 \rightarrow \text{conv.}$$

→ دائماً بختار أقل رقم بكون أنه أفضل من بين ٣ معادلات بختارها

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| > 1 \rightarrow \text{Div.}$$

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| \cong 1 \rightarrow \text{conv. slowly}$$

Point Iteration

Newton Raphson method

given $f(x)$, x_0

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Secant method

given $f(x)$, x_0, x_{-1}

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

$n \rightarrow$ $7{,}000001 \cong \boxed{8 = n}$ فلو كان الجواب Iteration عدد المرات بعمل فيها

Newton-Raphson method

↳ Jacobian matrix.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx} & \frac{df_1}{dy} \\ \frac{df_2}{dx} & \frac{df_2}{dy} \end{vmatrix}$$

$$x = \begin{vmatrix} f_1 & \frac{df_1}{dy} \\ f_2 & \frac{df_2}{dy} \end{vmatrix} \qquad y = \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx} & f_1 \\ \frac{df_2}{dx} & f_2 \end{vmatrix}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{|x_i|}{|J_i|} \qquad y_{i+1} = y_i - \frac{|y_i|}{|J_i|}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{\text{coefficient}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & y_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & y_3 \end{array}\right]$$

Augmented matrix [A:B]

Backword substitution

$$0x_1 + 0x_2 + \underline{10x_3} = 1$$ ← بتكون بـ R_3 آخر صف

forwor substitution

$$\underline{10\ x_1} + 0x_2 + 0x_3 = 1$$ ← بتكون بأول صف

Pivot

* لازم يكون كل نفس العمود

* كل Diagonal

$$-\left(\frac{\text{no. tobe zero}}{\text{Pivot}}\right) R_1 + R_2 \Rightarrow R_2$$

$$-\left(\frac{O}{\Delta}\right)$$

- خطوات التزم بها قبل البدء بعملية Gauss:

1) إذا كانت $|\Delta| < |O|$ ← لازم أعمل Row swapping ← لحتى تصبح $|\Delta| \geq |O|$

2) إذا كان عندي $\Delta = 0$ ← فلازم أعمل Row swapping

singular system

Det = 0

- Infinite solution

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- NO solution

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

ill condition

بقسم كل أكبر قيمة مطلقة بالصف

إهدى

- تقريباً → $Det \approx 0$ → ill condition
- $Det = 0$ → singular / well condition
- $Det \neq 0$ → well condition

Diagonal = 1

$$\begin{bmatrix} 1 & - & - \\ - & 1 & - \\ - & - & 1 \end{bmatrix}$$

* لازم يكون $Det < 0.1$ يعني قريب للصفر وهذا المطلوب لل ill condition

LU Decomposition

- $A = LU$
- $Ld = b$ ← Intermediant vector
- $Ux = d$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

نفسها

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

① l_{11}

$AA^{-1} = I$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \end{array}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}}_{I}$$

إذا طلب Find the 2nd column of the Inverse → $AX_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (b_2) → الحل يكون كالآتي

1) $Ld = \underline{b}$ → وجدته مهم $\begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix}$

2) $Ux = d$ → وهيك بطلعلك قيمة ⓧ العمود

Iacobi and Gauses sieded

* لكل من x_3 ، x_2 ، x_1 بختار الي معامله أكبر وهنوي القانون

Iacobi

$$x_{1,i+1} = \frac{b_1 - a_{12}\,x_{2,i} - a_{13}\,x_{3,i}}{a_{11}}$$

$$x_{2,i+1} = \frac{b_2 - a_{21}\,x_{1,i} - a_{23}\,x_{3,i}}{a_{22}}$$

$$x_{3,i+1} = \frac{b_3 - a_{31}\,x_{1,i} - a_{32}\,x_{2,i}}{a_{33}}$$

Gauses sieded

(فيها updating أسرع)

$$x_{1,i+1} = \frac{b_1 - a_{12}\,x_{2,i} - a_{13}\,x_{3,i}}{a_{11}}$$

$$x_{2,i+1} = \frac{b_2 - a_{21}\,x_{1,i+1} - a_{23}\,x_{3,i}}{a_{22}}$$

$$x_{3,i+1} = \frac{b_3 - a_{31}\,x_{1,i+1} - a_{32}\,x_{2,i+1}}{a_{33}}$$

$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ → كلهم لازم أقل من ϵ_a

إذا طلعوا كلهم أقل ما عدا ϵ_2

بكمل كمان Iteration لحد ما يصيروا كلهم أقل

Curve fitting

- Linear Regression
- Data Linearization
  - Power
  - Growth rate
  - Exponantial
- Polynomial Regression
- Multiple Linear Regression

Linear Regression

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \end{bmatrix}$$

Coefficient of corolation (R)

$$R = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2}\ \sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}}$$

$R = 1$ exact

- $R \approx 1$, $\geq 0{,}5$ → Excellent
  بكمل حل
- $R \approx 0$, $< 0{,}5$ → Poor
  ما بكمل حل
- $R = 0$ → No Relation, Independent
  ما في علاقة بين x, y

Polynomial Regression

$$\hookrightarrow y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^m$$

$$\overset{\text{signent}}{n} \geq \overset{\text{order}}{m+1}$$

min Data لشركة ال

$$\begin{array}{c} \\ x^0 \rightarrow \\ x \rightarrow \\ x^2 \rightarrow \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{ccccc} x^0 & x & x^2 & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} n & \sum x & \sum x^2 & \cdots & \sum x^m \\ \sum x & \sum x^2 & \sum x^3 & \cdots & \sum x^{m+1} \\ \sum x^2 & \sum x^3 & \sum x^4 & \cdots & \sum x^{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum x^m & \sum x^{m+1} & \sum x^{m+2} & \cdots & \sum x^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum xy \\ \sum x^2 y \\ \vdots \\ \sum x^m y \end{bmatrix}$$

Multiple Linear Regression

$$\hookrightarrow y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

حالا شرح

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_1 & \sum x_2 \\ \sum x_1 & \sum x_1^2 & \sum x_1 x_2 \\ \sum x_2 & \sum x_1 x_2 & \sum x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum x_1 y \\ \sum x_2 y \end{bmatrix}$$

Interpolation Polynomial

- Newton divided difference ((NDD))
- Lagrange

Dirivatives = "equaly spaced data"

- centered
- forword
- Backword

- $O(h)$ Low accuracy
- $O(h)^2$ Medium accuracy
- $O(h)^4$ High accuracy

◆ $h = x_{i+1} - x_i$ ← Toyler series اللي في

◆ إذا ما كانت step size ثابتة بحل على NDD
خلوكات كابدناك بحلهما عن طريق NDD إذا كانت
step size مش ثابتة
وبعد ما أطلع f(x) من NDD بروح بشتقها

Newton Divided Difference (NDD)

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$
$$\dots + b_n(x - x_0)(\dots)(x - x_{n-1})$$

Lagrange

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot L_i$$

◆ $$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

❖ Note:

$$\sum \text{terms in Lagrange} = \sum \text{terms in NDD}$$

Numirical Intigration

"equaly spaced" "Data"

- Trapizoidal Rule ①st
- Simson's Rule
  - 1/3 SR $\boxed{2^{nd}}$
  - 3/8 SR $\boxed{3^{rd}}$

Euler's method ①st

$\to y = y_i + f(x_i, y_i)\, h$

بدالشيخ

Trapizoidal Rule

$$\to I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_f)\right]$$

◆ $h = \dfrac{x_f - x_0}{n}$

3/8 SR

single $\boxed{n=3}$

$$I_{3/8} = \frac{3}{8} h \left[f(x_0) + 3 f(x_1) + 3 f(x_2) + f(x_f) \right]$$

multiple $\boxed{n=4}$

$$I_{3/8} = \frac{3}{8} h \left[f(x_0) + 3 \underline{\sum f(x_i)} + 2 \underline{\sum f(x_i)} + f(x_f) \right]$$

ما عدا مضاعفات ٣

مضاعفات ٣

Semson's Rule

1/3 SR

single $\boxed{n=2}$

$$I_{1/3} = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4 f(x_1) + f(x_f) \right]$$

multiple $\boxed{n=4}$ must be even

$$I_{1/3} = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 2 \sum_{i=2,4,\dots}^{n-2} f(x_i) + 4 \sum_{i=1,3,\dots}^{n-1} f(x_i) + f(x_f) \right]$$

even

odd